

# 指導資料



鹿児島県総合教育センター

## 算数・数学 第125号

－中学校，特別支援学校対象－

平成22年10月発行

### 「事象を数理的に考察し表現する能力を高める」ための指導の在り方

国際数学・理科教育調査(TIMSS)や国際学習到達度調査(PISA)の調査結果の分析から、数学科学習指導の課題の一つに、事象を数理的に考察し表現する能力が十分身に付いていないことが読み取れる。このことは、本県の「基礎・基本」定着度調査や全国学力・学習状況調査において、記述式問題や知識・技能を活用する問題の通過率が低い傾向にあることから明らかである。

そこで、本稿では、数学科の目標にあげられている「事象を数理的に考察し表現する能力を高める」指導の在り方について述べる。

#### 1 「事象を数理的に考察し表現する能力を高める」について

事象を数理的に考察し表現する能力を高める」とは、基礎的・基本的な知識・技能を使って根拠を明らかにして説明したり、表現したりする力を高めることである。また、算数・数学科の指導においては、小・中・高を通じて、事象を数理的に考察し表現する能力を高めることを重視している。小学校算数科においては、日常の事象に関連して数量や図形についての学習が進められるが、中学校数学科では、小学校算数の学習を基盤にして、日常的なもののみならず、様々な事象を数理的に

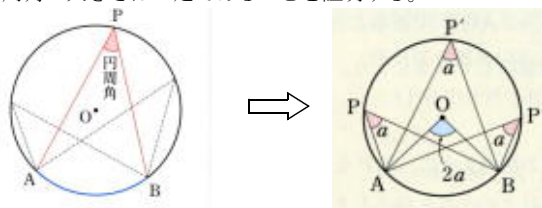
とらえ、考察し、表現したり、処理したりする能力を高めることをねらいとした指導をする必要がある。

「事象を数理的に考察すること」は、主に次の二つの場面で行われる。

- ① 日常生活や社会における事象から数学的なきまりや法則を見出し、数学の手法によって処理し、その結果を現実に照らして解釈する場面。
- ② 数学における事象を簡潔に処理しやすい形に表現し、適切な方法を選んで能率的に処理したり、その結果を発展的に考えたりする場面。

①については、例えば、円周角と中心角の間には「一つの円において同じ弧に対する円周角の大きさは、中心角の大きさの半分である」という関係を実測や証明を通して見出し、この関係を基にして、「一つの円において同じ弧に対する円周角の大きさは一定である」ことを説明できる。

円Oの弧ABを除く円周上に点Pをとり、点Pの位置をいろいろと変えて、 $\angle APB$ の大きさを調べ、中心角 $\angle AOB$ と比べる。  
 $\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$  であること見出し、1つの弧に対する円周角の大きさは一定であることを証明する。



②については、例えば、十の位の数がa、一の位の数がbである2位数(10a + b)と、十の位の数aと一の位の数bを入れ替えてできる2位数(10b + a)との和は、11の倍数になることを見出した後、「和」を「差」に変えると9の倍数となることを説明し、新しい性質を導くことができることなどである。

【和として考える場合】	【差として考える場合】
$(10a + b) + (10b + a)$	$(10a + b) - (10b + a)$
$= 11a + 11b$	$= 9a - 9b$
$= 11(a + b)$	$= 9(a - b)$
(11の倍数となる)	(9の倍数となる)

表現する能力は、主に、次の三つの場面で必要となる。

- ① 推測したり見出したりした数や図形の性質などを的確に表す場面
- ② ①の妥当性などについて根拠を明らかにして筋道立てて説明する場面
- ③ 既習の数学を活用する手順を順序よく的確に説明する場面

表現することで、他者と自分の考えとを伝え合い共有し合うことができ、質的な向上を図ることが可能となる。このように、表現することは、知的なコミュニケーションを支え、そのコミュニケーションを通して、更に表現

の質を高めることにつながる。

## 2 「事象を数理的に考察し表現する能力を高める」ための指導の在り方について

事象を数理的に考察し表現するためには、個々が見出したことや考えたことを記号などの数式・文字式、また、表、グラフ、線分図、更に「正三角形」「平行四辺形」などの用語や「直線上の点」などの数学固有の言い表し方も含めた数学的な表現を用いる必要がある。この表現された内容を他者に理解させるために、説明する活動が必要となる。P1の1で示した $11(a + b)$ のような数学的な表現は、それが意味する概念と結びつかなければ、形式的処理に陥った指導となり、意味する概念が理解できず、数学を苦手とする生徒を増やしてしまうと考える。事象を数理的に考察し表現する能力を高めることで、生徒は、数学の苦手意識を克服したり、真の学力を身に付けたりできると考える。

事象を数理的に考察し表現する能力を高めるためには、表1のような学習活動を通して、培われる。

表 1

【指導のねらい】	【学習活動】
① 事象から数学的な内容や関係について、思考し、課題を明確にすること。	(1) 式や数量関係からきまりを見出す活動
② 数学的な表現により形式化し、見出したことを一般的な表現にすること。	(2) 数量関係を図や表、式に表して、数量関係や図形の内容をとらえて考察・探究する活動
③ 数学的に表現されたことを根拠を明らかにして説明したり、記述したりすること。	(3) 考察・探究した事象を既習事項を基に見通しをもって、類推、帰納的・演繹的な数学的な考え方をういて問題を解決する活動
④ 記述された数学的な表現を読み取れること。	(4) 問題解決の過程や結果を図、表、グラフ、式などを用いて分かりやすく簡潔に表現する活動
⑤ 数学的な表現のよさに気づき、活用すること。	(5) 問題解決の過程を振り返り、解決方法を一般化して発展的な学習に活用する活動
	(6) 導き出された結果を式、数量、図形などを用いて、根拠を明らかにして説明する活動
	(※(1)～(6)は、「指導と評価」2009年11月号 参考)

### 3 具体的な指導方法について

ここでは、二つの指導事例を用いて、「数理的に考察し表現する能力を高める」ための指導の要点を明らかにしたい。指導事例1は、全国学力・学習状況調査の分析資料（授業アイデア例から引用）の「文字式の利用」についての指導から、指導事例2は、「2乗に比例する関数」の一単位時間の学習指導から、事象を数理的に考察し表現する能力を高める指導事例を述べる。なお、指導事例の中に示された番号は(例(1), ①など)は、P2の表1と対応している。

#### 【指導事例1】 文字式の利用

##### 【指導のねらい】

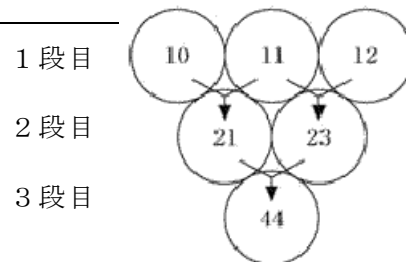
具体的な例を基に説明の見通しをもち、文字列を活用し、根拠を明らかにして、それに基づいて結論を導くことを通して、事柄が成り立つ理由を一般的に説明できるようにする。

##### 【問題】

右の図のように、3段に並んでいる○の1段目に連続する3つの自然数を順に入れます。隣り合う2つの数の和を2段目の○に入れ、同様にして3段目の数を求めます。

(1) 1段目にいろいろな自然数を入れて、3段目がどのような数になるかを調べなさい。

(2) (1)で見出した性質が成り立つ理由を説明しなさい。



##### 【授業展開例】

1 具体例を基に3段目の数について調べ、成り立つ性質を3つの事象から推測できる式で表す。

$(10+11)+(11+12)$	$(1+2)+(2+3)$	$(2+3)+(3+4)$
$=21+23$	$=3+5$	$=5+7$
$=44$	$=8$	$=12$
$=4 \times 11$	$=4 \times 2$	$=4 \times 3$

※  $4 \times$  (ある数) で表すことで4の倍数であることに気付かせる。

2 4の倍数になることの理由を説明する。

4の倍数を表す式はどのような形になるだろうか。

- ・  $4 \times$  (ある数:  $a$ ) の式は、4の倍数である。
- ・ 文字式を使って説明すると、 $4a$  となる。

3 「1段目にどんな連続する3つの自然数を入れても、3段目の数はいつも4の倍数になる。」ことを文字式を使って説明する。

連続する3つの自然数のうち、もっとも小さい数を  $n$  とすると、(中略)

$$n+(n+1)+(n+1)+(n+2)$$

$$=(2n+1)+(2n+3)$$

$$=4n+4$$

$$=4(n+1)$$

ここで、 $(n+1)$  は自然数だから、 $4(n+1)$  は、4の倍数である。したがって、3段目の数は4の倍数である。

$4n+4$  は、「4の倍数である」は不十分であるので、 $4(n+1)$  の形まで変形し、 $(n+1)$  が自然数であることを根拠にして、4の倍数であることを説明させる。

分配法則を用いることで変形できることに気付かせる。

4×○の形にならないかな？  
44, 8, 12は、まとめるとどんな形(式)になるかな。

(2) 数量関係を図や表、式に表して数量関係や図形概念をとらえて考察・探究する活動

① 事象から数学的な内容や関係について思考し、課題を明確にすること。

(3) 考察・探究した事象を既習事項を基に見通しをもって、類推、演繹的・帰納的な数学的な考え方を用いて問題を解決する活動

② 数学的な表現により形式化し、見出したことを一般的な表現にすること。

(6) 導き出された結果を式、数量、図形などを用いて、根拠を明らかにして説明する活動

③ 数学的に表現されたことを根拠を明らかにして説明したり、記述したりすること。

#### 【指導事例2】 2乗に比例する関数 (1/2時間)

##### 【本時の目標】

- ① 具体的な事象において、ともなって変わる2つの数量を取り出し、それらの対応を表や式に表すことができる。
- ② 具体的な事象の中には、比例や1次関数とは異なる数量の関係があることに気づき、関数  $y = ax^2$  について考察することができる。

学習過程	時間	学習のねらいと発問	主な学習活動	指導上の留意点														
問題把握	10(分)	1 レディネスの確認 「関数」という言葉の意味を思い出してみよう。		<ul style="list-style-type: none"> <li>○ 本時の学習に対してのモチベーションを高める。 ・プレゼンテーションを用いて既習事項の確認を行う。</li> <li>○ 学習課題を提示する。</li> </ul> <p><b>【学習課題】</b></p> <p>下の図のように、1辺が2cmの正方形のタイルを階段状に敷きつめていきます。このとき、伴って変わる2つの数量の関係を調べてみよう。</p>  <ul style="list-style-type: none"> <li>・課題の意味を的確につかませる。</li> </ul>														
		発問① 「2つの数量関係について、これまでどんなことを学んできましたか。」	<ul style="list-style-type: none"> <li>・既習の伴って変わる2つの数量を想起する</li> <li>・既習の「比例」や「反比例」、「1次関数」について確認する。</li> </ul>															
自力解決	10(分)	4 課題の追究 I 発問② 「段の数に伴って変わる数量を見つけよう。」	<ul style="list-style-type: none"> <li>・階段状にしきつめた正方形のタイルを見て、段の数に伴って変わる数量を探す。 ・高さ ・その段におけるタイルの枚数 ・タイルの総数 ・各自ワークシートに整理する。</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ ワークシートを配布し、「高さ」, 「その段におけるタイルの枚数」, 「タイルの総数」の3つの関係について調べさせる。</li> <li>○ 戸惑っている生徒には、具体物を用いて思考させる等手立てを行う。</li> <li>○ 早く終わった生徒には、他の関係についても考えさせる</li> <li>○ 3つの関係について整理し、それぞれの確認をする。</li> <li>○ 「段の数とタイルの総数」の関係や「段の数と直角の個数の総数」の関係をもとに、式や関係を考察させる。</li> </ul>														
		(1) グループ(等質)により見出した数量関係について交流し、2乗に比例する関数など、数量関係からきまりを見出す活動	<p><b>【その段におけるタイルの枚数】</b></p> <table border="1"> <tr><td>x(段目)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>...</td></tr> <tr><td>y(枚)</td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>9</td><td>...</td></tr> </table> <p>(式: <math>y = 2x - 1</math>) &lt;関係: 1次関数&gt;</p>		x(段目)	1	2	3	4	5	...	y(枚)	1	3	5	7	9	...
		x(段目)	1		2	3	4	5	...									
		y(枚)	1		3	5	7	9	...									
		発問③ 「段の数をx, 伴って変わる数量をyとしてその関係を表にまとめてみよう。また、それぞれの表について、xとyの関係を言葉や式にまとめてみよう。」	<p><b>【高さ】</b></p> <table border="1"> <tr><td>x(段目)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>...</td></tr> <tr><td>y(枚)</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td><td>...</td></tr> </table> <p>(式: <math>y = 2x</math>) &lt;関係: 比例&gt;</p>		x(段目)	1	2	3	4	5	...	y(枚)	2	4	6	8	10	...
		x(段目)	1		2	3	4	5	...									
y(枚)	2	4	6	8	10	...												
(2) 数量関係を図に表したり、表に表したり、式に表したりして、数量関係や図形概念をとらえて考察・探究する活動	<p><b>【タイルの総数】</b></p> <table border="1"> <tr><td>x(段目)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>...</td></tr> <tr><td>y(枚)</td><td>1</td><td>4</td><td>9</td><td>16</td><td>25</td><td>...</td></tr> </table> <p>(式: <math>y = x^2</math>) &lt;関係: ?&gt;</p>	x(段目)	1	2	3	4	5	...	y(枚)	1	4	9	16	25	...			
x(段目)	1	2	3	4	5	...												
y(枚)	1	4	9	16	25	...												
② 数学的な表現により形式化し、見出したことを一般的な表現にすること。	<ul style="list-style-type: none"> <li>・「段の数とタイルの総数」の関係は、新しい数量関係であることに気付く。</li> <li>・「段の数と直角の個数の総数」についても考察する。</li> <li>・「yはxの2乗に比例するという。」ことについてふれる。</li> </ul>																	
5 課題の追究 II 発問⑤ 「段の数と直角の個数の総数についても表と式で表してみよう。」	<p><b>【直角の個数の総数】</b></p> <table border="1"> <tr><td>x(段目)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>...</td></tr> <tr><td>y(個)</td><td>4</td><td>16</td><td>36</td><td>64</td><td>100</td><td>...</td></tr> </table> <p>(式: <math>y = 4x^2</math>) &lt;関係: ?&gt;</p>	x(段目)	1	2	3	4	5	...	y(個)	4	16	36	64	100	...			
x(段目)	1	2	3	4	5	...												
y(個)	4	16	36	64	100	...												
⑤ 数学的な表現のよさに気付きそのよさを活用すること。	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ 解決の見通しをもたせる。 ・答えを予想する。 ・自分の考えを持たせる。</li> <li>○ 「段の数とタイルの総数」と「段の数と直角の個数の総数」の関係について他の関係と異なる箇所に注目し、新しい数量関係の存在を意識付ける。</li> </ul>																	
相互解決	20(分)	(6) 導き出された結果を式、数量、図形などを用いて、根拠を明らかにして説明する活動	<p>③ 発表のポイントを提示して、お互いに根拠を明らかにして説明することで、表現力を高める。</p> <p><b>【発表のポイント】</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1 xとyの関係を表にまとめると、○○○○だから、段の数は○と○○の関係があります。</li> <li>2 関係式は○○と表せませす。</li> </ol>	<p>☆つまづきや困難点の発見に努め、ヒントカードを提示するなどの手立てをする。</p> <p>☆一人一人の考え方や解き方のよさを認める。</p>														
		④ 問題解決の過程や結果を図、表、グラフ、式などを用いて分かりやすく簡潔に表現する活動	<p>④ 記述された数学的な表現を読み取れること。</p>															

《垂水市立垂水中央中学校 野間 卓 教諭の学習指導案に加筆》【県教委 モデル学習指導案 Webページ参照】

事象を数理的に考察し表現する能力を高めるためには、毎時間の授業において、生徒が数学的な表現を用いて、考えを交流する活発な学習活動を行えるように、授業を改善する必要がある。

—引用・参考文献—

文部科学省『平成21年度全国学力・学習状況調査』平成21年  
文部科学省『学習指導要領解説 数学編』平成20年  
金本良通『数学的コミュニケーション能力の育成』明治図書  
辰野千尋他『指導と評価』(11月号)平成21年 図書文化社

(教職研修課)