http://www.edu.pref.kagoshima.jp/ （通巻第１７０８号）

指導資料

鹿児島県総合教育センター

算数・数学 第129号

－ 高等学校，特別支援学校対象 －

平成23年10月発行

算数・数学科における「学び直し」の実践について

平成20年１月の中央教育審議会答申の中で，算数科・数学科については，「内容の系統性を重視しつつ，学年間や学校段階間で内容の一部を重複させて，発達や学年の段階に応じた反復（スパイラル）による教育課程を編成できるようにする」ことが述べられた。

そこで本稿では，新学習指導要領，教育課程実施状況調査の結果を踏まえ，学習意欲を高め，基礎的・基本的な知識・技能を身に付けさせるとともに，理解の広がりや深まりなど，学習の進歩が感じられような「学び直し」の実践例と指導計画の具体化について述べる。

１ 学び直しの重要性

(1) 新学習指導要領から

平成21年３月に告示された高等学校の新学習指導要領において，総則＜第１章第５款の３の(3)＞に，「各教科・科目の指導に当たり，義務教育段階での学習内容の確実な定着を図るための学習機会を設けること」と示されている。

具体的には，関連する小・中学校の内容を適宜取り入れ，復習した上で学習を進めたり，新たに学習した視点で小・中学校の内容を見直したりすることである。そのためには，①科目の単位数を標準単位数を超えて増加して配当する，②学校設定科目を開設し，必履修科目の前に履修させる，③指導計画に学び直しの機会を設定する，などが考えられる。

(2) 公立高等学校における教育課程の編成・実施状況調査から

文部科学省が全国の公立高等学校を対象に，平成22年度に実施したこの調査の「学習習熟度別学級編制の状況(全日制)」についての一部を示したのが**表１**である。

表１ 義務教育段階の学習内容の確実な定着を図るための指導を実施した教科（必履修教科・科目） 平成22年度入学者の実施学科の割合（%）

① 標準単位数を超えて単位数を増加して配当
② 学校設定科目等の履修後，必履修教科・科目を履修

		国語	地公	数学	理科	外国語	その他
普通科	①	16.4	9.7	**14.6**	10.2	18.5	1.3
	②	0.9	0.3	**1.2**	0.3	1.5	0.3
専門学科	①	12.4	4.6	**10.6**	4.7	9.9	0.7
	②	0.5	0.1	**1.0**	0.3	0.6	0.3
総合学科	①	9.6	3.9	**16.8**	5.7	22.1	0.7
	②	0.4	0.0	**1.1**	0.0	0.7	0.0

この調査において，本県の公立高等学校では，**表１**の数学の①には全部で22学科が該当し，数学の②に関する学校設定科目は１学科も設定されていない状況にある。義務教育段階の学習内容の確実な定着を図るためには，科目の単位数を標準単位数を超えて配当し，指導計画に学び直しの機会を設定する傾向にある。

また，必履修科目だけでなく，他の科目の指導においても，算数・数学の系統性を踏まえた指導により，概念・原理等のより確実な定着を図りたい。

2　学び直しのための実践例

(1)　課題の設定

> 「三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした３つの垂線は，１点で交わる。」ことを証明せよ。

この課題解決の中心となる内容は，「２直線の位置関係における垂直条件」である。

(2)　課題に関連する指導内容の整理

新学習指導要領における(1)の課題に関連する指導内容を挙げると，**表２，表３，表４**のとおりである。

表２　小学校で学習する主な内容

<u>第２学年　C (1)　三角形や四角形などの図形</u>

ものの形についての観察や構成などの活動を通して，図形を構成する要素に着目し，図形について理解できるようにする。

ア　三角形，四角形について知ること。

イ　正方形，長方形，直角三角形について知ること。

[用語・記号]　直線　直角　頂点　辺

<u>第４学年　C (1)　平行四辺形，ひし形，台形</u>

図形についての観察や構成などの活動を通して，図形の構成要素及びそれらの位置関係に着目し，図形についての理解を深める。

ア　直線の平行や垂直の関係について理解すること。

イ　平行四辺形，ひし形，台形について知ること。

[用語・記号]　平行　垂直　対角線

表３　中学校で学習する主な内容

<u>第１学年　B　図形</u>

(1) 観察，操作や実験などの活動を通して，見通しをもって作図したり図形の関係について調べたりして平面図形についての理解を深めるとともに，論理的に考察し表現する能力を培う。

ア　角の二等分線，線分の垂直二等分線，垂線などの基本的な作図の方法を理解し，それを具体的な場面で活用すること。

[用語・記号]　弧　弦　//　⊥　∠　△

表４　高等学校で学習する主な内容

<u>数学Ａ　(3)　図形の性質</u>

平面図形や空間図形の性質についての理解を深め，それらを事象の考察に活用できるようにする。

ア　平面図形

(ｱ)　三角形の性質

三角形に関する基本的な性質について，それらが成り立つことを証明すること。

○　三角形の３辺の垂直二等分線は１点で交わることを証明せよ。

○　三角形の３つの頂点から向かい合う辺に下ろした垂線が交わる点を，三角形の垂心という。

<u>数学Ⅱ　(2)　図形と方程式</u>

座標や式を用いて，直線や円などの基本的な平面図形の性質や関係を数学的に表現し，その有用性を認識するとともに，事象の考察に活用できるようにする。

ア　直線と円

(ｱ)　点と直線

座標を用いて，平面上の線分を内分する点，外分する点の位置や二点間の距離を表すこと。また，座標平面上の直線を方程式で表し，それを二直線の位置関係などの考察に活用すること。

○　異なる２直線 $y = m_1x + k_1$，$y = m_2x + k_2$ は $m_1 m_2 = -1$ のとき，垂直である。

○　点 A(3, −1) を通り，直線 $3x+2y+1=0$ に垂直な直線の方程式を求めよ。

<u>数学Ｂ　(3)　ベクトル</u>

ベクトルの基本的な概念について理解し，その有用性を認識するとともに，事象の考察に活用できるようにする。

ア　平面上のベクトル

(ｱ)　ベクトルとその演算

ベクトルの意味，相等，和，差，実数倍，位置ベクトル及びベクトルの成分表示について理解すること。

(ｲ)　ベクトルの内積

ベクトルの内積及びその基本的な性質について理解し，それらを平面図形の性質などの考察に活用すること。

○　$\vec{0}$ でない２つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 90° のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は垂直であるといい，$\vec{a} \perp \vec{b}$ と書く。

○　$\vec{a} \perp \vec{b}$ のとき，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

○　ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ において，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=4$ とするとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるように，t の値を定めよ。

数学Ⅲ　(1)　平面上の曲線と複素数平面

平面上の曲線がいろいろな式で表されること及び複素数平面について理解し，それらを事象の考察に活用できるようにする。

イ　複素数平面

(ｱ)　複素数の図表示

複素数平面と複素数の極形式，複素数の実数倍，和，差，積及び商の図形的な意味を活用すること。

○　複素数平面上で，異なる４つの複素数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ を表す点を，それぞれ A，B，C，D とするとき，次のことを示せ。

$$\mathrm{AB}\perp\mathrm{CD} \Leftrightarrow \frac{\beta-\alpha}{\delta-\gamma} \text{ が純虚数}$$

(3)　指導内容の系統性の整理

これらの指導内容のつながりを整理すると，次のようになる。

小学校第２学年（直線，直角，頂点，辺）
↓
小学校第４学年（平行，垂直）
↓
中学校第１学年（線分の垂線，垂直二等分線）
↓
高等学校数学Ａ

X：三角形の３辺の垂直二等分線は１点で交わる。（外心）
↓
Y：三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした３つの垂線は１点で交わる。（垂心）

↓ 数学Ⅱ ― 数学Ｂ ― 数学Ⅲ

中学校第１学年では垂線の作図の後に垂直二等分線の作図の指導が行われることが多いが，数学Ａでは，**X**の後に**Y**が指導されることが多いことに留意したい。

また，「２直線の位置関係における垂直条件」を中心に，課題（**Y**）解決のための各分野における表現・処理を分析することが重要である。鋭角三角形の場合を例とした**X**，**Y**の解答例（解１・２は数学Ａ，解３は数学Ⅱ，解４は数学Ｂ，解５は数学Ⅲ）は以下のとおりである。

（※は関連する学習内容である。）

＜**X**の解答例＞

解）△ABCにおいて，図のように辺ABの垂直二等分線と辺BCの垂直二等分線の交点をOとすると

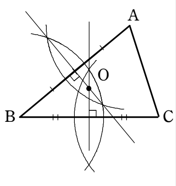
OA＝OB，OB＝OC

よって　OA＝OC

このことから，Oは辺ACの垂直二等分線上にもある。

したがって，△ABCの３辺の垂直二等分線は１点で交わる。

図



※垂直二等分線（中学校第１学年）

＜**Y**の解答例＞

解１）図１のように，頂点A，B，Cから対辺に下ろした垂線の足をD，E，Fする。

頂点A，B，Cを通り，それぞれ対辺に平行な直線を引き，それらの交点をP，Q，Rとする。

このとき，四角形ARBC，ABCQは，いずれも平行四辺形であるから，

BC＝RA，BC＝AQ

よって　　RA＝AQ

また，BC // RQ，BC⊥AD より　AD⊥RQ

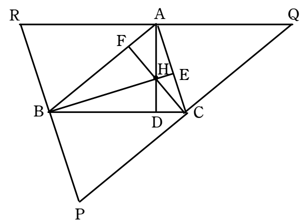
したがって，直線ADは線分QRの垂直二等分線である。

同様に，直線BEは線分PRの垂直二等分線，直線CFは線分PQの垂直二等分線である。

よって　３つの直線AD，BE，CFは△PQRの外心Hで交わる。

すなわち，△ABCの各頂点から対辺に引いた垂線は，１点で交わる。

図１



※平行な直線，平行四辺形（小学校第４学年）

垂直二等分線（中学校第１学年）

解２）図２のように，頂点A，B，Cから下ろした垂線の足をD，E，Fとする。

△ACFと△ABEにおいて

∠CAF＝∠BAE，∠AFC＝∠AEB＝90°より

△ACF ∽ △ABE

したがって　$\frac{AF}{AE}=\frac{AC}{AB}$

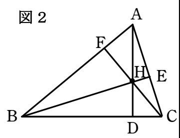
同様にして　$\frac{BD}{BF}=\frac{BA}{BC}$，$\frac{CE}{CD}=\frac{CB}{CA}$

よって　$\frac{AF}{AE}\cdot\frac{BD}{BF}\cdot\frac{CE}{CD}=\frac{AC}{AB}\cdot\frac{BA}{BC}\cdot\frac{CB}{CA}=1$

すなわち　$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$

チェバの定理の逆より，△ABCの各頂点から対辺またはその延長に下ろした３つの垂線は，１点で交わる。

図２



※直角三角形（小学校第２学年）

＜三角形の相似条件：中学校第３学年＞

＜チェバの定理：数学Ａ＞

解３）右の図３のように，座標軸を定め，$a\neq0$，A$(0, a)$，B$(b, 0)$，C$(c, 0)$とする。

頂点B，Cから対辺に下ろした垂線の足をE，Fとする。

$bc\neq0$のとき

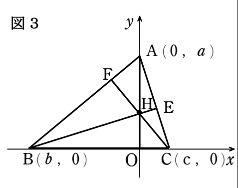
直線BEは　$y=\frac{c}{a}x-\frac{bc}{a}$ …①

直線CFは　$y=\frac{b}{a}x-\frac{bc}{a}$ …②

２直線BE，CFは，H$\left(0, -\frac{bc}{a}\right)$で交わり，この点はAO上にあるので，

各頂点から対辺またはその延長に下ろした３つの垂線は，１点で交わる。

図３



※直角三角形（小学校第２学年）

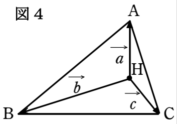
垂直（小学校第４学年）

＜二直線の位置関係：数学Ⅱ＞

解４）頂点B,Cからそれぞれの対辺CA,ABに下ろした垂線の交点をHとする。

図４のように，$\vec{a}=\overrightarrow{HA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{HB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{HC}$ とおく。

図４



HB⊥CA だから　$\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$

$\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$　…①

HC⊥AB だから　$\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$

$\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$　…②

①，②より　$\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$　　$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{c}-\vec{b}\neq\vec{0}$ より　$\vec{a}\perp(\vec{c}-\vec{b})$

したがって　$\overrightarrow{HA}\perp\overrightarrow{BC}$　すなわち　HA ⊥ BC

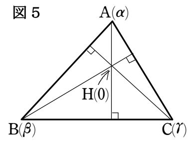
各頂点から対辺またはその延長に下ろした３つの垂線は，１点で交わる。

※垂直（小学校第４学年）

＜ベクトルの垂直条件：数学Ｂ＞

解５）A，Ｂから対辺に下ろした２つの垂線の交点を図５のように，H(0)とし，A(α)，B(β)，C(γ)とする。

図５



HA⊥BC から $\dfrac{\alpha}{\gamma-\beta}$ は純虚数である。

すなわち　$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\gamma-\beta}\right)}=-\dfrac{\alpha}{\gamma-\beta}$

ゆえに　$\overline{\alpha}\gamma-\overline{\alpha}\beta=\alpha\overline{\beta}-\alpha\overline{\gamma}$　……①

HB⊥CA から $\dfrac{\beta}{\alpha-\gamma}$ は純虚数である。

すなわち　$\overline{\left(\dfrac{\beta}{\alpha-\gamma}\right)}=-\dfrac{\beta}{\alpha-\gamma}$　　ゆえに　$\overline{\beta}\alpha-\overline{\beta}\gamma=\beta\overline{\gamma}-\beta\overline{\alpha}$　……②

①，②を辺々加えて　$(\overline{\alpha}-\overline{\beta})\gamma=(\beta-\alpha)\overline{\gamma}$　　ゆえに　$\overline{\left(\dfrac{\gamma}{\beta-\alpha}\right)}=-\dfrac{\gamma}{\beta-\alpha}$

よって，$\dfrac{\gamma}{\beta-\alpha}$ は純虚数となり，HC⊥AB となる。

各頂点から対辺またはその延長に下ろした３つの垂線は，１点で交わる。

※垂直（小学校第４学年）

＜二直線の位置関係：数学Ｂ＞

３　学び直しを取り入れた指導計画の具体化

２(3)の内容をもとに，例えば，履修順序が，数学Ａ(平面図形)→数学Ⅱ(図形と方程式)→数学Ｂ(ベクトル)→数学Ⅲ(複素数平面)の場合，次のような具体的な計画が考えられる。

(1)　数学Ａにおける学び直し

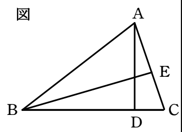
（義務教育段階の内容の学び直し）

第１時：小学校第２学年，第４学年
中学校第１学年の内容
第２時：数学Ａの**Ｘ**，**Ｙ**の内容

【留意点】垂直二等分線を作図させ，垂直二等分線上の点は，２点からの距離が等しいことを確認する。また，チェバの定理の前に，下の証明問題(中学校第３学年)を扱うことも考えられる。

図のような△ABCの頂点A，Bから辺BC，CAに，それぞれ垂線AD，BEを引くとき，△ADC∽△BECであることを証明しなさい。

図



解）△ADCと△BECについて

共通な角だから　　∠ACD＝∠BCE　…①

∠ADC＝∠BEC＝90°　　　…②

①，②より　２角の大きさが等しいから

△ADC∽△BEC

(2)　数学Ｂにおける学び直し

（学年間の内容の学び直し）

第１時：数学Ａ，数学Ⅱ
第２時：数学Ｂ

【留意点】学び直しの指導内容を精選し，例えば，この第１時を，数学Ｂの「ベクトル　第２節　ベクトルと図形」の指導計画に加え，単元全体の配当時間を見直す必要がある。

(3)　数学Ⅲにおける学び直し

（学年間の内容の学び直し）

第１時：数学Ⅲ
第２時：数学Ａ，Ⅱ，Ｂ

【留意点】履修順序が後の科目においては，それまでに学習した科目の内容で課題解決できないかを考えさせることが重要である。

＜第２時の課題設定例＞

「三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした３つの垂線は，１点で交わる。」ことを３通りで証明してみよう。

基本的な概念や原理・法則の体系的な理解のためには，義務教育段階での学習内容の系統性を踏まえ，指導方法や指導内容を事前に考察するとともに，指導の重点化を図り，年間指導計画を作成することが重要である。そのためには，その科目の単位数を標準単位数を超えて増加して，教育課程を編成することが考えられる。

学び直しの重要性の一つは，以前の指導内容を意図的に取り上げることで，生徒の理解を広げたり，深めたりして，学習意欲を向上させることにある。さらに，学び直しの過程では，知識・理解に重点が置かれがちであるが，それを体系化することにより，数学的な見方や考え方を育てることにつなげることが大切である。

―参考文献―

○文部科学省『高等学校学習指導要領解説』 平成11年，平成21年

○吉田明史編著『高等学校　新学習指導要領の展開　数学科編』 平成22年

（教科教育研修課）