指導資料

鹿児島県総合教育センター

数　学　第136号

－高等学校，特別支援学校対象－

平成25年10月発行

系統性を生かした数学の学習指導の工夫
－二次関数の最大・最小の学習を通して－

学習指導要領の改訂において数学Ⅰは，必履修科目として設定された。その内容は，その後に学習する科目の系統性を考慮するとともに，中学校の領域を踏まえ下の①～④で構成されている。

中学校の領域		数学Ⅰの内容
A　数と式	⇨	①　数と式
B　図形	⇨	②　図形と計量
C　関数	⇨	③　二次関数
D　資料の活用	⇨	④　データの分析

これから学習する内容について，生徒が中学校でどのように学習してきているかを知ることで，より充実した指導計画を作成し，系統性を生かした学習指導ができる。

そこで本稿では，二次関数の最大・最小を例に，その工夫について述べる。

１　二次関数の学習内容

(1)　系統性

数学Ⅰで学習する二次関数の系統性について整理すると次の**図１**のようになる。

二次関数は，中学校の「関数」領域で学習した比例，反比例，一次関数及び２乗に比例する関数を中心に，「数と式」領域で学習した二次方程式などと関連させながら学習する。また，数学Ⅱで学習する三角関数等の様々な関数や，微分・積分へとつながっていく。

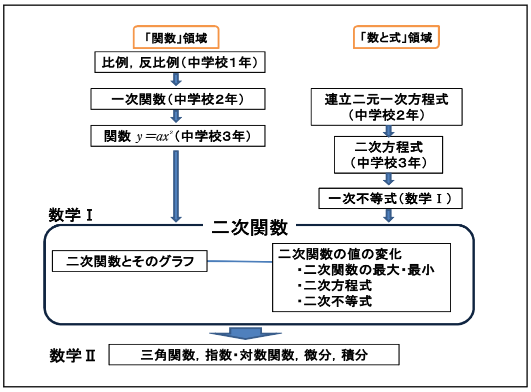


図１　二次関数の系統図

(2)　中学校で学習する内容

中学校の「関数」領域では，「関数は具体的な事象や場面との関わりの中で学習することが大切である。」としている。

関数を考察する際に表，式，グラフを相互に関連付けながら変化の割合やグラフの特徴などの理解を一層深めていく。

第１学年の比例では，x と y の関係を $y=ax$ の式で表す関数として捉え，グラフで表すと原点を通る直線であることを学習する。

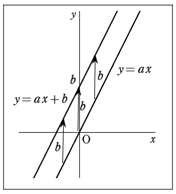


図２　$y=ax$ と $y=ax+b$ のグラフ

第２学年では，比例で学習した関数 $y=ax$ の式を基に，$y=ax+b$

の式を一次関数として学習していく。また，グラフについては$y=ax$ のグラフをy 軸方向に平行移動したものとして考える（**図２**）。

第３学年で，関数$y=ax^2$を学習するが，最大・最小については，x の変域が，与えられた（限られた）ときのy の変域について学んでいる。また，y 軸（頂点）を境にy の値の増加・減少が変わることも学習する（**図３**）。

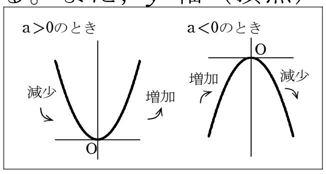
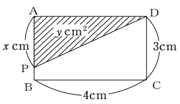


図３　関数 $y=ax^2$ のグラフの増減

さらに，最大･最小の問題では場合分けをして考える必要がある。中学校の学習では場合分けについて，次のような問題で学習している。

問題　右図の長方形ＡＢＣＤで，点Ｐは A を出発して辺上をＢ，Ｃを通りＤまで動く。点ＰがＡから $x$cm 動いたときの△ＰＡＤの面積を $y$cm^2 とする。このとき，x と y の関係をグラフに表せ。



この問題では，点Ｐが辺ＡＢ，ＢＣ，ＣＡのそれぞれにあるときで場合分けして考えると，次のようになる。

$0<x<3$ のとき，辺AB上にあり

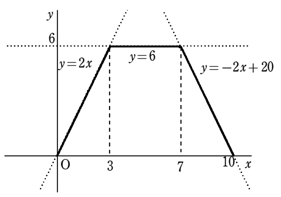
$y=\frac{1}{2}\times4\times x=2x$

$3\leqq x\leqq7$ のとき，辺BC上にあり

$y=\frac{1}{2}\times4\times3=6$

$7<x<10$ のとき，辺CD上にあり

$y=\frac{1}{2}\times4\times(10-x)=-2x+20$



(3)　高等学校で学習する内容

高等学校では，一般の二次関数 $y=ax^2+bx+c$ について考察する。

二次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフについては，関数 $y=ax^2$ のグラフの平行移動を扱い，$y=ax^2+bx+c$ で表される式を $y=a(x-p)^2+q$ の形に式変形し，軸や頂点に着目させて，関数 $y=ax^2$ のグラフとの位置関係などを調べる（**図４**）。また，グラフを通して関数の値の変化を考察し，関数の最大値・最小値を求めることができるようにする。

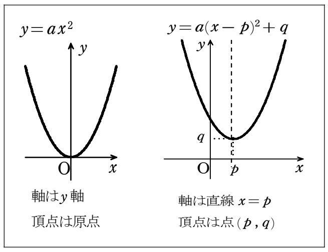


図４　関数 $y=ax^2$ のグラフと二次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

さらに，二次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフを利用して，二次方程式 $ax^2+bx+c=0$の解を考えたり，二次不等式の解をグラフと x 軸との位置関係から求められるようにする。

２　二次関数の最大･最小の指導

ここでの指導においては，中学校での既習事項との関連性を意識させて指導を行っていく。また，中学校における指導と同様に，図（グラフ）をかいて考えさせる。

なお，ここでは x^2の係数 a が正の数でグラフの形が下に凸の場合で考えた。

(1)　グラフ全体での最大・最小

二次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは x^2の係数 a の符号が，正または負によって**図５**のように二通り考えられる。

ここでは，頂点の y 座標が放物線の形により最小値になったり，最大値になったりすることをしっかりと押さえておく。

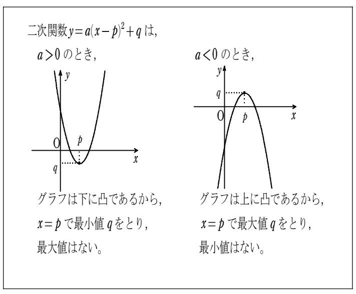


図５　二次関数 $y=a(x-p)^2+q$ のグラフと最大・最小

(2)　x の定義域が与えられたときの最大・最小

ここでは，与えられた定義域の中に次の二通りが考えられることを確認する。

ア	軸（頂点）を含む場合
イ	軸（頂点）を含まない場合

アの場合は，**図６**のようになる。

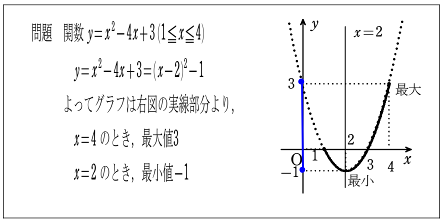


図６　軸（頂点）を含む場合

頂点が点(2,−1)であることに着目した上で，定義域を確認することが大切である。この場合は，中学校の教科書にも示されている。安易に両端の値で判断させないように図（グラフ）を利用して考えることをここで徹底させたい。

また，イの場合は，**図７**のようになる。

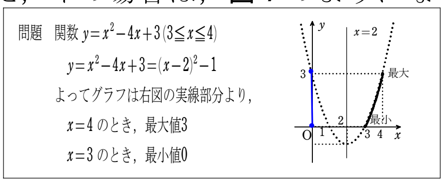


図７　軸（頂点）を含まない場合

ここで，アとイに共通していることは，最大値が軸から遠い方の端点であることである。このとき，**図２**よりグラフは軸から離れていくにつれて y 座標が大きくなることにも気付かせたい。

x^2 の係数 a が負の数でグラフが上に凸の場合は最大･最小の部分を逆に考えればよい。

(3)　文字を含む場合の最大・最小

次に，定義域や軸に文字を含む場合について考える。文字を扱うことで場合分けが必要となる。どのように場合分けを考えるかを整理する。ここでは最大値と最小値を別々に考えて，下に凸のグラフにおいて，まず最小値を考えていく。

生徒に場合分けのイメージをもたせるために，文字の部分に具体的な数値をいくつか代入して具体例を図に示させて考えさせる。

ア　定義域に文字を含む場合

一方の端点だけ（例：$0\leqq x\leqq a$）の場合と両端（例：$a\leqq x\leqq a+2$）の場合と二通りあるが，いずれも同じ考え方ができるので，一方の端点だけの場合で考えていく。

問題　関数 $y=x^2-4x+3$ の $0\leqq x\leqq a$ における最小値を求めよ。

まず，a に具体的な数値を代入する。グラフは固定しているので，定義域が変わることによって，どこで最小になるかを考えればよい。

図８のように a に１，２，４を代入してそれぞれ図に表す。a ＝１のときと a ＝４のときで，軸を定義域に含むか否かの確認をさせる。また，a ＝２のときは，定義域の右端と軸が重なる場合，つまり軸を定義域に含んでいるが，軸を含まない場合と同

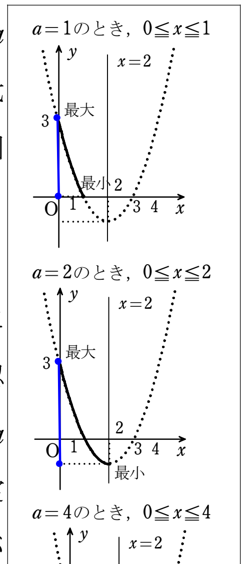
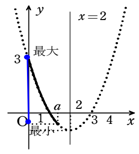


図８　具体的な数値を代入した例

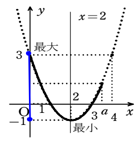
じパターンで考えることもできる。これらの図を実際にかくことで，生徒は $a=2$ を境にして場合分けをすればよいことに気付く。

この具体例で考えたことを基に，２つの場合に分けて考えていくと次のような解答ができる。

ⅰ）$0<a<2$ のとき
グラフは右図の実線部分より，
$x=a$ のとき，最小値 a^2-4a+3



ⅱ）$2\leqq a$ のとき
グラフは右図の実線部分より，
$x=2$ のとき，最小値 -1



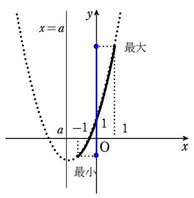
また，$a=4$ のときを考えさせることで，両端が同じ値で最大値になることに気付かせる。

イ　軸に文字を含む場合

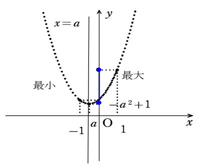
問題　関数 $y=x^2-2ax+3$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最小値を求めよ。

まずは，アの場合と同様に軸を定義域に含むか否かで場合分けを考える。解答は以下のとおりになる。

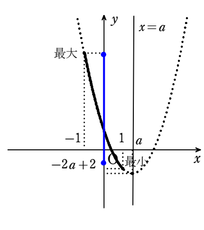
$y=x^2-2ax+1=(x-a)^2-a^2+1$
よって，軸の方程式は直線 $x=a$
ⅰ）$a<-1$ のとき
グラフは右図の実線部分より，
$x=-1$ のとき，最小値 $2a+2$



ⅱ）$-1\leqq a\leqq 1$ のとき
グラフは右図の実線部分より，
$x=a$ のとき，最小値 $-a^2+1$



ⅲ）$1<a$ のとき
グラフは右図の実線部分より，
$x=1$ のとき，最小値 $-2a+2$



これより文字を含んだ場合の最大・最小については，下の**表１**のように整理ができる。

表１　文字を含む場合の最大・最小

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="2"></td><td colspan="2">文字を含む部分</td></tr>
<tr><td>定義域</td><td>軸</td></tr>
<tr><td rowspan="2">最小値</td><td rowspan="2">軸(頂点)と定義域の位置関係</td><td>定義域の内側</td><td colspan="2">頂点の y 座標</td></tr>
<tr><td>定義域の外側</td><td colspan="2">定義域の両端のうちで軸に近い方の端点の y 座標</td></tr>
<tr><td>最大値</td><td colspan="2">軸(頂点)と定義域の位置関係に関係なし</td><td colspan="2">定義域の両端のうちで軸に遠い方の端点の y 座標</td></tr>
</table>

数学が苦手な生徒にとっては，文字を含むのが定義域の場合と軸の場合を別なものとして捉えがちである。しかし，**表１**から分かるように，最小値に関してはどちらに文字を含んでいるかは関係なく，定義域と軸の位置関係で場合分けをし，同じように考えることができることを生徒に理解させたい。

今回取り上げた二次関数の最大・最小は**図１**の系統図の中にも示したように，今後学習する分野と大変関わりが深い。基本的な考え方をしっかりと定着させるために，図，表，グラフなどの数学的な表現を用いて考えさせたり，さらにＩＣＴを活用したりするなどして，学習指導の工夫が行われることを期待したい。

－参考文献－
○　文部科学省『高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』　平成21年
○　文部科学省『中学校学習指導要領解説　数学編』　平成20年

（教科教育研修課）