指導資料 数 学 第142号

鹿児島県総合教育センター
平成27年10月発行

対象校種 幼稚園 小学校 中学校 高等学校 特別支援学校

「学び直し」を生かした複素数平面の指導法

複素数は，一つの数で２次元の平面と対応しており，複素数 $z=x+yi$ は，原点を始点とする位置ベクトル $\vec{p}=(x,\ y)$ と捉えることができる。

「複素数平面」を指導する際，既習事項である「ベクトル」で学習した内容との関連性を，「学び直し」によって意識させることで，「複素数平面」の理解に役立ててほしい。

１　「ベクトル」と「複素数平面」の学習について

平成20年１月の中央教育審議会答申において，算数・数学科の改善の基本方針の一つとして「子どもたちが算数・数学を学ぶ意欲を高めたり，学ぶことの意義や有用性を実感したりできるようにすることが重要である。そのために，例えば，発達や学年の段階に応じた反復（スパイラル）による教育課程により，理解の広がりや深まりなど学習の進歩が感じられるようにすること」と示されている。このことは，指導資料第129号に記載しているように，以前の指導内容を意図的に取り上げ，学習意欲を向上させることや，それを体系化することで数学的な見方や考え方を育てることにつながる点で，「学び直し」を生かした指導に結び付く。

「ベクトル」の学習は，位置ベクトルやベクトル方程式など，新たな概念の理解が必要となる内容であり，生徒も苦手意識をもちやすい。また，「複素数平面」の学習では，複素数の図表示に関する知識を習得することを目標としており，「図形と方程式」や「ベクトル」の単元と平面上の図形を扱う点で共通している。

これらのことから，主としてベクトルの学習内容の「学び直し」を生かした複素数平面の指導法について考える。

なお，三つの点 A，B，C は，それぞれ位置ベクトルが，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ によって表され，複素数平面上では，それぞれ複素数 α，β，γ で表されるとする。

２　平面上の点の位置ベクトルと複素数で表された複素数平面上の点の関連性

平面上の点を表す位置ベクトルの考え方

と，複素数平面上の点の考え方はほぼ同じであると言える。位置ベクトルの考え方を振り返り，図や式を基にして，複素数平面上の点の考え方と同じであると，生徒に気付かせたい。

(ベクトル)

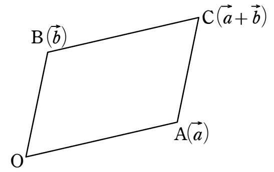
平面上の２つの点A，Bの位置ベクトル

$\vec{a}=(a\ ,\ b\ )$，$\vec{b}=(c\ ,\ d\ )$

に対して，３点O，A，Bが一直線上にないとき，

和 $\vec{a}+\vec{b}=(a+c\ ,\ b+d)$

を位置ベクトルとする点Cをとると，四角形OACBは平行四辺形になる。



平面上の２点A，Bの距離について，

AB$=|\vec{b}-\vec{a}|$

で表され，

AB$=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$

(複素数平面)

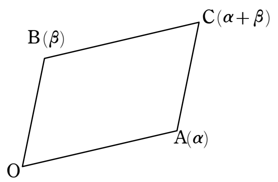
複素数平面上の２つの点A，Bが，２つの複素数

$\alpha=a+bi$，$\beta=c+di$

によってそれぞれ表され，３点O，A，Bが一直線上にないとき，

和 $\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i$

で表される点Cをとると，四角形OACBは，平行四辺形になる。



平面上の２点A，Bの距離について，

AB$=|\beta-\alpha|$

で表され，

AB$=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$

次に，「複素数平面」における「内積」を表す式について，生徒に考えさせてみたい。一般に，「複素数平面」の学習では「内積」を表す式は扱われない。しかし，「ベクトル」と「複素数平面」の関連性を考える上で，生徒に気付かせてほしい内容である。次のような具体的な二つの単元の問題を通して考えさせる。

(ベクトル)

問　２つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が，$|\vec{a}|=8$，$|\vec{b}|=5$，$|\vec{a}-\vec{b}|=7$を満たすとき，$|\vec{a}-3\vec{b}|$の値を求めよ。

(解)

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\,\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$\quad=89-2\,\vec{a}\cdot\vec{b}$

これが49になるので，$2\,\vec{a}\cdot\vec{b}=40$　すなわち，$\vec{a}\cdot\vec{b}=20$

$|\vec{a}-3\vec{b}|^2=|\alpha|^2-6\,\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

$\quad=64-6\cdot20+9\cdot25=169$

$|\vec{a}-3\vec{b}|\geqq0$ より，$|\vec{a}-3\vec{b}|=\underline{\underline{13}}$

(複素数平面)

問　２つの複素数α，βが，$|\alpha|=8$，$|\beta|=5$，$|\alpha-\beta|=7$を満たすとき，$|\alpha-3\beta|$の値を求めよ。

(解)

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)\overline{(\alpha-\beta)}=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})=\alpha\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}-\beta\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}$

$\quad=|\alpha|^2-(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta)+|\beta|^2=89-(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta)$

これが49になるので，$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=40$

$|\alpha-3\beta|^2=|\alpha|^2-3(\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta)+9|\beta|^2$

$\quad=64-3\cdot40+9\cdot25=169$

$|\alpha-3\beta|\geqq0$ より，$|\alpha-3\beta|=\underline{\underline{13}}$

ここで次のような発問が考えられる。

発問例　２つの解答を比較して，内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を複素数で表してみよう。

自己解決を試みた後，周囲と協力して，次のことに気付かせたい。

内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$は$\dfrac{\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta}{2}$に等しい　……①

複素数を用いた「内積」の登場によって，生徒はベクトルと複素数平面の学習内容の関連性が高いことを実感する。このことは，幅広い課題に対応しうる発展的な思考力の育成にも結び付くと考える。

３　３点が一直線上にある条件，垂直条件

３点 A，B，C が一直線上にある条件は，ベクトル，複素数平面，いずれの学習においても扱われるが，形は全く異なる。

ベクトルの条件$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$（$k$は実数）　…②

複素数の条件 $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数　……③

これではベクトルと複素数との関連性を感じられず，ベクトルの「学び直し」を複素数平面の学習に結び付けにくい。

そこで，次のような発問が考えられる。

> 発問例　②と③の式が等しいことを導いてみよう。

例えば，次のような過程で導かれる。

> $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，
> $\vec{c}-\vec{a}=k(\vec{b}-\vec{a})$
> したがって，
> $\gamma-\alpha=k(\beta-\alpha)$
> $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=k$　(実数)

垂直条件についても，一見すると関連性が見られない。

> ベクトルの条件　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$　……④
>
> 複素数の条件　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数　……⑤

ここでも次のような発問ができる。

> 発問例　①を用いて，④と⑤の式が等しいことを導いてみよう。

例えば，次のような過程で導かれる。

> $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ より，
> $(\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0$
> ここで，①を利用することで，
> $\dfrac{(\gamma-\alpha)\overline{(\beta-\alpha)}+\overline{(\gamma-\alpha)}(\beta-\alpha)}{2}=0$
> $(\gamma-\alpha)\overline{(\beta-\alpha)}+\overline{(\gamma-\alpha)}(\beta-\alpha)=0$
> 両辺を$(\beta-\alpha)\overline{(\beta-\alpha)}$ で割って，
> $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}+\dfrac{\overline{\gamma-\alpha}}{\overline{\beta-\alpha}}=0$
> $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=-\overline{\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)}$
> したがって，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が純虚数

以上の結果，３点が一直線上にある条件及び垂直条件は，表現は異なるが，ベクトルと複素数平面のいずれも同じものであると認識されるであろう。

4　直線や円の方程式

ベクトルでは，直線や円をベクトル方程式を用いて表す。同様に，複素数を用いて直線や円を表すことができる。大学入試においては，直線や円，領域などの出題が見られることから，生徒の進路選択の状況に応じて取り扱いたい。

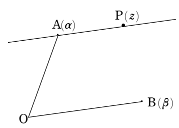
(1)　１点Ａを通り，傾きが$\vec{d}$（直線 OB）に平行な直線の方程式

ベクトルと複素数を用いた方程式は次のとおりである。

> ベクトル方程式　$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$　(t は実数)
>
> 複素数を用いた方程式 $\dfrac{z-\alpha}{\beta}=\overline{\left(\dfrac{z-\alpha}{\beta}\right)}$

ここでも，３と同じように，生徒自ら二つの式が等しいことを導けるように働き掛けたい。

> $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$　(t は実数) より，
> $z=\alpha+t\beta$　(t は実数) だから，
> $\dfrac{z-\alpha}{\beta}=t$
> $\dfrac{z-\alpha}{\beta}=\overline{\left(\dfrac{z-\alpha}{\beta}\right)}$



これを用いた問題を考える。

> 問　１点A$(1+3i)$ を通り，傾きを表す複素数が $2+i$ である直線の方程式を求めよ。
>
> (解)
> $\overline{\beta}(z-\alpha)=\beta\overline{(z-\alpha)}$ に，$\alpha=1+3i$，$\beta=2+i$ を代入し，
> $(2-i)(z-1-3i)=(2+i)(\overline{z}-1+3i)$
> $\underline{\underline{(2-i)z-(2+i)\overline{z}-10i=0}}$
>
> 複素数平面における直線の方程式は，このような形が一般形であるが，生徒の理解は得られにくい。そこで，
> $z=x+yi$（x，y は実数）として簡単にすれば，
> $(x-2y+5)i=0$
> $x-2y+5$ は実数より，$\underline{\underline{x-2y+5=0}}$
> というように，直線の方程式が得られる。

(2)　２点Ａ，Ｂを結ぶ線分の垂直二等分線の方程式

この方程式を，ベクトルの学習では，

線分 AB の中点を通り，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$に垂直な直線の方程式として，$\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$ のように表すことが多い。しかし，複素数平面の学習においては，２点 A，B から等距離にある点の集合として，$|z-\alpha|=|z-\beta|$のように表されることが一般的である。生徒には，幅広い視点で向き合う機会にもなろうが，混乱を生じさせる可能性も否定できない。そこで，次のような過程を生徒自身に導かせることで，関連付けさせたい。

$|z-\alpha|=|z-\beta|$ より，

$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{p}-\vec{b}|$ であるから，

$$|\vec{p}-\vec{a}|^2=|\vec{p}-\vec{b}|^2$$

$$|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2=|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

$$\vec{p}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)-\frac{|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2}{2}=0$$

$$\vec{p}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)-\frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)}{2}=0$$

よって，$\left(\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=0$

(3)　２点 A，B からの距離が $m:n$ となる点の集合が表す円(アポロニウスの円)の方程式

アポロニウスの円の方程式は，「図形と方程式」の単元で初めて登場する。AP : BP ＝ $m:n$ の各単元での表現は，

(図形と方程式)

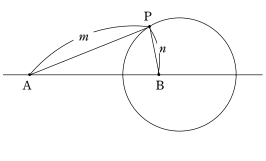
$n\mathrm{AP}=m\mathrm{BP}$

(ベクトル)

$n|\vec{p}-\vec{a}|=m|\vec{p}-\vec{b}|$

(複素数平面)

$n|z-\alpha|=m|z-\beta|$



となる。ベクトルと複素数平面の具体的な問題で解答の進め方を見ていく。実際の授業では，複素数平面における学習の前に振り返ることで，いずれの単元についても理解が深まると考える。

(ベクトル)

問　２点A(−2，0)，B(４，０)に対して，AP:BP=2:1 を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(解)

点Pの位置ベクトルを$\vec{p}$とし，$\vec{a}=(-2，0)$，$\vec{b}=(4，0)$とする。AP:BP=2:1 より，$|\vec{p}-\vec{a}|=2|\vec{p}-\vec{b}|$

両辺を２乗して，$|\vec{p}-\vec{a}|^2=4|\vec{p}-\vec{b}|^2$

$$3|\vec{p}|^2-2\vec{p}\cdot\left(4\vec{b}-\vec{a}\right)+4|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2=0$$

$$\left\{3\vec{p}-\left(2\vec{b}+\vec{a}\right)\right\}\cdot\left\{\vec{p}-\left(2\vec{b}-\vec{a}\right)\right\}=0$$

$$\left(\vec{p}-\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}\right)\cdot\left\{\vec{p}-\left(2\vec{b}-\vec{a}\right)\right\}=0$$

これは，２点$\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$，$2\vec{b}-\vec{a}$ を直径の両端とする円を表すので，２点(２，０)，(10，０)を直径の両端とする円，すなわち，中心(６，０)，半径４の円

(複素数平面)

問　複素数平面上の２点A(−2)，B(4)に対して，AP:BP=2:1 を満たす点Pの軌跡を求めよ。

(解)

点Pを複素数zによって表される点とし，$\alpha=-2$，$\beta=4$ とする。AP:BP=2:1 より，$|z-\alpha|=2|z-\beta|$　すなわち，

$|z+2|=2|z-4|$　両辺を２乗して，$|z+2|^2=4|z-4|^2$

$$(z+2)\overline{(z+2)}=4(z-4)\overline{(z-4)}$$

$$(z+2)(\bar{z}+2)=4(z-4)(\bar{z}-4)$$

展開して整理すると，

$$z\bar{z}-6z-6\bar{z}+20=0$$

$$(z-6)(\bar{z}-6)=16$$

$$(z-6)\overline{(z-6)}=16$$

$|z-6|^2=16$ だから$|z-6|=4$ となり，中心が点６で半径４の円

５　おわりに

複素数平面の学習では，この外にも様々な単元における既習事項と関連を図ることができる。その中でも，複素数平面の学習においてベクトルの学習内容を取り上げることは，図と式を比較して共通性を見いだしたり，発問を工夫することで，効果的な「学び直し」になり，相互の理解が深まるものと考える。各学校においても，様々な指導の工夫を期待したい。

－参考文献－

○　文部科学省『高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』平成21年

○　文部省『高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』平成元年

○　鹿児島県総合教育センター『指導資料第1708号（算数・数学第129号）』平成23年10月

（教科教育研修課）