http://www.edu.pref.kagoshima.jp/ （通巻第１９２２号）

指導資料 数 学 第146号

鹿児島県総合教育センター
平成29年10月発行

対象校種	高等学校　特別支援学校

「部屋割り論法（鳩の巣原理）」を用いた論理的思考力を育成するための指導について

学習指導要領の改訂へ向けて中教審答申では，「事象を論理的に説明すること」に課題があることを指摘している。論理的思考力を育成する上で効果的な題材の一つである，「部屋割り論法（鳩の巣原理）」を用いた指導の工夫について紹介する。

１　はじめに

現行学習指導要領では，数学科の目標として「事象を数学的に考察し表現する能力を高める」ことが示されている。また，指導上配慮すべき事項には,「自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり，議論したりすること」が示されている。

数学は先人たちの知恵の集積であり，記号化によって数学的事象を数式で表現したものが多い。しかし，生徒にとっては数式の表す意味の解釈に意識が傾いてしまい，数式をうまく活用できずに数学的な思考力・表現力の向上に及ばない生徒も少なくない。

学習指導要領の改訂へ向け，答申でも「数学の学習に対する意欲が高くないこと」や「事象を式で数学的に表現したり論理的に説明したりすること」を課題として指摘している。また，答申では「数学的な見方・考え方」を更に豊かで確かなものにすることを掲げ，この中の「数学的な考え方」については，目的に応じて数，式，図，表，グラフ等を活用し，論理的に考え，問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識・技能等を関連付けながら統合的･発展的に考えることであるとしている。

これらのことを踏まえると，整数問題は複雑な記号を用いた表現が少ないため課題の把握が容易であり,「数学的な見方・考え方」を働かせ，説明したり議論したする場面を取り入れることができ，思考力や表現力を育成する上で適した分野と言える。

「部屋割り論法(鳩の巣原理)」については，整数問題の学習の中で扱われており，学習指導要領解説では，分数を小数で表した際，循環小数になるものに関して，割り算の余りに注目した考察に用いるとしている。例えば $\frac{1}{7}$ は割り切れないが，割り算を行うと 1，2，3，4，5，6 のいずれかの余りが出てくる。割り切れないので，やがて必ず同じ余りが出てくることが，部屋割り論法から説明でき，$\frac{1}{7}$ が循環小数になることを表している。

２　部屋割り論法（鳩の巣原理）とは

ある条件を満たすものの存在を証明する際，数学的帰納法や背理法を用いることが多いが，整数問題の中には「部屋割り論法（鳩の巣原理）」を用いると解決に有効なものもある。

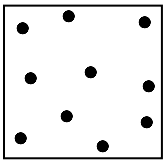
部屋割り論法（鳩の巣原理）とは，「n 個の部屋に，$n+1$ 人を入れると，少なくとも１部屋に２人以上入る部屋が存在する。」と

いうもので，自明と思われる内容であるが，様々な事象において,「少なくとも一つは〇〇〇となることが存在する。」というような命題の証明に効果を発揮する。

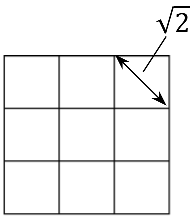
この証明の最大のポイントは，何を部屋（鳩の巣）にするかという「部屋割りの設定」である。幾つかの例を紹介する。

３　部屋割り論法（鳩の巣原理）を使った指導

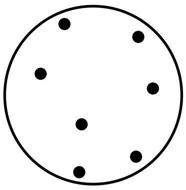
(1)　図形に含まれる点の距離に関する課題

> 課題(1)－１　３×３の正方形の中で，任意の10個の点をとると，いずれか２点の距離は$\sqrt{2}$ 以下であることを示せ。
>
> 

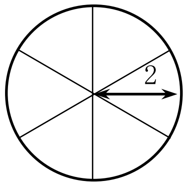
この問題は実際の箱（鳩の巣）をイメージしやすく，部屋割り論法（鳩の巣原理）のポイントである,「部屋割りの設定」が考えやすいものである。３×３の正方形全体を考えていくと，いずれかの２点の距離が$\sqrt{2}$ 以下になることは「何となくそうなりそう」という漠然としたものになってしまう。そこで，帰納的に考え，９個までの点ならば，距離が$\sqrt{2}$ 以下にならないのではないかという見通しができ，１×１の９部屋の「部屋割りの設定」が考えられる。一つの部屋に１個ずつ点をうまくとると，どの２点の距離も$\sqrt{2}$ 以下にならない。しかし，10個の点をとると，少なくとも一つの部屋には，線上を含めて２個以上入り，２点の距離は$\sqrt{2}$ 以下になってしまう。



同様に，次の課題(1)－２のような問題も類似問題として考えられる。

> 課題(1)－２　直径４の円の中に，７個の点をどのようにとっても，必ず互いの距離が２以下の２個の点があることを証明せよ。
>
> 

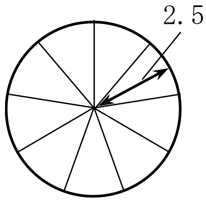
中心角 60 度のおうぎ形６部屋に分割すると，６個までは一つの部屋に１個ずつ点をうまくとれば，距離が２以下にならないが，７個の点をとると，少なくともどこか一つの部屋には２個以上入るという部屋割り論法が成り立つので，距離が２以下になる点が生じてしまう。



1997 年日本数学オリンピックで出題された問題は，この発展的な問題である。

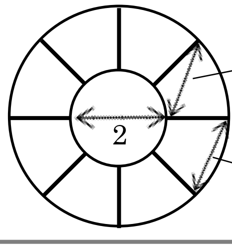
> 課題(1)－３　直径５の円の中に，10個の点をどのようにとっても，必ず互いの距離が２より小さい２個の点があることを証明せよ。

こちらは 10 個の点であるから，９部屋の設定を試みる。単純に中心角を９等分したおうぎ形の部屋割りでは，部屋の中の２点が最大で 2.5 となるので失敗である。



そこで，円の内側に，直径が ２ の同心円の部屋をつくり，周囲のドーナツ状の領域を８部屋に分割してみる。このとき，各部屋の中に点をとった際の最大距離を考える。座標平面で考えれば，円の中心を原点とすると，(1，0)と$\left(\frac{5}{2}\cos 45°,\ \frac{5}{2}\sin 45°\right)$の距離が最大なので，

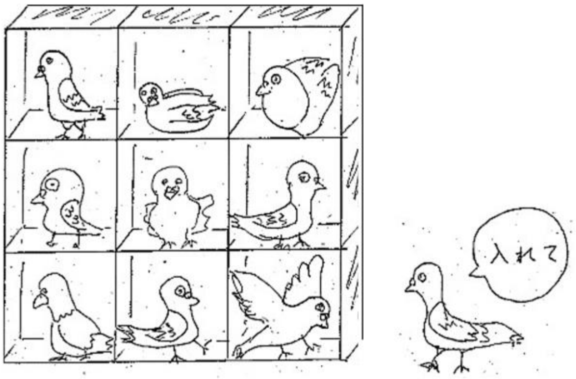
$\sqrt{\frac{29-10\sqrt{2}}{4}} < \sqrt{3.715} < 2$ となり，確かに２より小さくなる。同様に，部屋内のどの２点の距離も２より小さい。10個の点は９部屋のいずれかに入り，少なくとも一つの部屋には２個以上入るという部屋割り論法が成り立つ。



$\sqrt{\frac{29-10\sqrt{2}}{4}} < \sqrt{3.715} < 2$

$\sqrt{\frac{50-25\sqrt{2}}{4}} < \sqrt{3.6625} < 2$

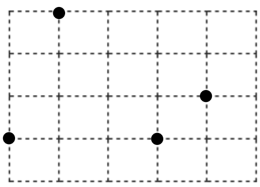
> **解決のポイント**
>
> 部屋の中の最大距離が，条件の距離以下になるような「部屋割りの設定」を試みる。



(2)　任意の二つの格子点の中点に関する課題

課題(2)－1　座標平面で,異なる５個の格子点のうち，いずれか２個を結ぶと，その中には,その線分の中点も格子点になるものが存在することを示せ。

この問題は，課題(1)－1のように部屋割りを考えようとしても，イメージしにくい。そこで,帰納的に考え,「４個の格子点」までは，中点が格子点であるものを避けられるのではないかという見通しができる。確かに４個まではできるが，５個になるとどのように格子点をとっても，中点が格子点になるものが生じてしまう。



４個はうまくいくが，
５個目が置けない。

中点が格子点になる２個の点に着目すると，x，y 座標の偶数，奇数が一致していることが分かる。このことより，x，y 座標が（偶，偶），（偶，奇），（奇，偶），（奇，奇）であれば，どの２点の中点も格子点にならず，これを４部屋として設定することが考えられる。異なる５個の格子点はいずれかの部屋に入り，少なくとも１部屋には格子点が２個以上入るという部屋割り論法が成り立つ。

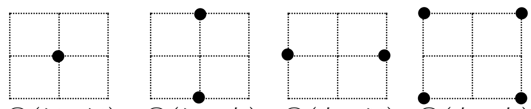
この問題は，座標平面での出題であるが，発展的に考え，座標空間での出題が次の課題(2)－2である。

課題(2)－2　座標空間で，異なる９個の格子点のうち，いずれか２個を結ぶと，その線分の中点も格子点になることを示せ。（1989 広島大学）

また，次のような類題も出題されている。

課題(2)－3　m を $2≦m≦9$ をみたす自然数とする。xy 平面上の点のうち，x 座標と y 座標がともに整数のものを格子点という。x 座標と y 座標がともに－1，0，1 のいずれかである９個の格子点を考える。これらの格子点から異なる m 個の格子点を選ぶ。選ばれた m 個の格子点のうち，どの異なる２点の中点も格子点とならないような m 個の格子点を選ぶ選び方の総数を a_m とおく。a_m　($2≦m≦9$) を求めよ。(2016 神戸大)

課題(2)－1より，$m≧5$ のとき $a_m=0$ と分かるので，$m=2$，3，4 の３通りだけを数えればよいことになる。ここでは，$m=3$ の場合について考える。次の①～④の４部屋に分けて考え，３個の格子点が，別の部屋から選ばれたものであればよい。



①(偶，偶)　②(偶，奇)　③(奇，偶)　④(奇，奇)
１通り　２通り　２通り　４通り

①，②，③からの選び方は１×２×２＝４
①，②，④からの選び方は１×２×４＝８
①，③，④からの選び方は１×２×４＝８
②，③，④からの選び方は２×２×４＝16
よって，$a_3=4+8+8+16=36$
同様にして，$a_2=28$，$a_4=16$ も得られる。

解決のポイント x，y 座標の偶数と奇数の組合せが４種類であることに着目し，４つの「部屋割りの設定」を試みる。

(3)　自然数の選び方に関する課題

> 課題(3)－1　$2n$ 個の自然数 1，2，3，…，$2n$ の中から $n+1$ 個を選ぶとき，その中に連続する 2 個の数が必ず含まれることを示せ。

帰納的に考え，「$2n$ 個の中から n 個選んだ」ときまでは，連続する 2 個の数が選ばれることを避けられるのではないかと見通しができる。(1，2)，(3，4)，(5，6)，…，($2n-1$，$2n$)のように，問題の条件である「連続する 2 個の数」からなる，自然数 2 個ずつの n 部屋に分けることを考える。$n+1$ 個の数を選ぶと，2 個とも選ばれる部屋が少なくとも 1 部屋は存在することから，部屋割り論法より題意は示されたことになる。

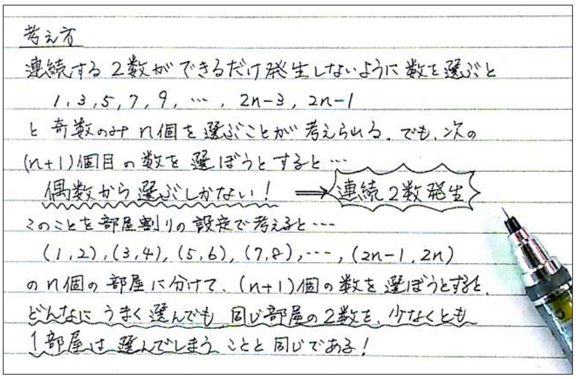


写真１　生徒の思考の様子

この問題についても，条件を変更することで，次のように発展させることができる。

> 課題(3)－2　$4n$ 個の自然数 1，2，3，…，$4n$ の中から $3n+1$ 個を選ぶとき，その中に連続する 4 つの数が必ず含まれることを示せ。（2009 東北大学）

課題(3)－1 と同様に，帰納的に考え，「$4n$ 個の中から $3n$ 個選んだ」ときまでは，連続する 4 個の数が選ばれることを避けられるのではないかと見通しができる。(1，2，3，4)，(5，6，7，8)，…，($4n-3$，$4n-2$，$4n-1$，$4n$) の n 個の部屋に分けることを考える。このとき，$3n$ 個までは，各部屋に 1 個ずつの余りを設けることができるが，$3n+1$ 個目で，4 個全てが選ばれる部屋が存在してしまう。このことより，部屋割り論法が成り立つ。

> 課題(3)－3　1～50 の整数に対して異なる 26 個の整数を選ぶと，その中の 2 個の整数の和には 51 になるものがあることを示せ。

「部屋割りの設定」が難しい問題である。帰納的に考えようとしても，どの数値を帰納的に考えればよいか見当をつけにくい。そこで，和が 51 になることから，そのような組合せを考えると，(1，50)，(2，49)，…，(25，26)の 25 種類になる。この組合せが生じないように 1～50 の中から整数を選ぶと，25 個まではうまくいくが，26 個目でいずれかの組合せで 2 個の数が選ばれることになる。すなわち，25 種類の部屋が存在していると考えると，26 個の整数を選ぶと必ず 1 部屋に 2 個の整数が選ばれた部屋が存在してしまう。ゆえに，部屋割り論法により題意は示される。

> **解決のポイント**
> 条件を満たすような自然数の組合せによる「部屋割りの設定」を試みる。

4　おわりに

事象を数学的に考察し表現する能力を高めることは，数学科の目標の一つであり，学力向上にも不可欠である。そのため，授業において課題設定の工夫を行うとともに，解決のために必要な知識・技能において生徒間に大きな差が生じないよう準備し，生徒に数学的に思考することの楽しさを十分に味わわせることが重要である。「型」の習熟に終始し，思考の機会を欠いた授業では真の学力向上は期待できない。生徒の論理的思考力育成のため，当資料が各学校の指導の工夫につながれば幸いである。

－参考文献－

○　文部科学省『高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』平成 21 年
○　文部科学省『幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）』平成 29 年
○　『現代数学 2016 年 7 月』，現代数学社，pp.24－27

（教科教育研修課　泊 弘光）