

指導資料

数学 第154号

鹿児島県総合教育センター
令和2年10月発行

対象
校種

中学校 義務教育学校
特別支援学校



数学的な表現を用いて説明する力を育む指導 — 「文字を用いた式」の指導を通して —

全国学力・学習状況調査や鹿児島学習定着度調査において活用に関する問題に課題が見られる。特に、「数と式」の領域では、文字を用いた式で説明する問題に課題がある。そこで、過去の調査問題を基に、文字を用いた式で説明する指導の在り方について紹介する。

1 はじめに

平成29年3月に公示された学習指導要領における数学科の目標の柱書には、数学的活動を通して数学的に考える資質・能力を育成していくことが示されている。その数学的活動については、解説の中で、図のような問題発見・解決の過程が示されている。

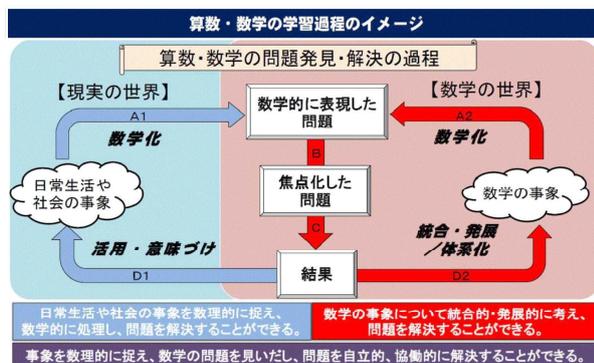


図 算数・数学の問題発見・解決の過程

数学的活動については、「主体的・対話的で深い学び」を実現する主要な側面として、以下の三つが〔数学的活動〕として各学年の内容に示されている。

- ・ 日常の事象や社会の事象から問題を見いだし解決する活動
- ・ 数学の事象から問題を見いだし解決する活動
- ・ 数学的な表現を用いて説明し、伝え合う活動

また、数学に関わる事象や、日常生活や社会に関わる事象について、数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して新しい概念を形成したり、よりよい方法を見いだしたりするなど、新たな知識・技能を身に付けてそれらを統合し、思考、態度が変容する「深い学び」を実現することも求められている。

平成31年度全国学力・学習状況調査の中学校数学においても、「文字を用いた式」の問題が出題されている。類似問題は、これまでも数回出題されているが、正答率は低く、課題が継続している。

そこで、全国学力・学習状況調査の「数と式」領域の「文字を用いた式」で説明する問題(第2学年)を題材として、その指導の在り方について述べていくことにする。

2 「数と式」領域の「式」の指導について

「数と式」領域の「式」については、主に、次の五つの資質・能力の育成を目指して指導が行われる。

- ① 文字のもつ意味、特に変数の意味を理解すること
- ② 文字を用いた式に表現したり、文字を用いた式の意味を読み取ったりすること
- ③ 文字を用いた式の計算や処理をすること

- ④ 既に学習した計算の方法と関連付けて、文字を用いた式の計算の方法を考察し表現すること
- ⑤ 文字を用いた式を具体的な場面で活用すること

第2学年の「文字を用いた式」の単元において、文字を用いて表現したり、説明したりする活動は、資質・能力を培うために重要である。前述の五つの資質・能力を踏まえて、指導を行う必要がある。

3 平成31年度全国学力・学習状況調査の調査問題から

平成31年度全国学力・学習状況調査において出題された「文字を用いた式」の問題と概要は以下のとおりである。

9 拓斗さんと若菜さんは、連続する3つの奇数の和がどんな数になるかを調べています。

1, 3, 5のとき $1 + 3 + 5 = 9 = 3 \times 3$
 5, 7, 9のとき $5 + 7 + 9 = 21 = 3 \times 7$
 13, 15, 17のとき $13 + 15 + 17 = 45 = 3 \times 15$

拓斗さんは、これらの結果から次のことを予想しました。

予想1

連続する3つの奇数の和は、中央の奇数の3倍になる。

上の予想1がいつでも成り立つことは、次のように説明できます。

説明1

n を整数とすると、連続する3つの奇数は、 $2n+1$ 、 $2n+3$ 、 $2n+5$ と表される。それらの和は、
 $(2n+1) + (2n+3) + (2n+5)$
 $= 2n+1 + 2n+3 + 2n+5$
 $= 6n+9$
 $= 3(2n+3)$
 $2n+3$ は中央の奇数だから、 $3(2n+3)$ は中央の奇数の3倍である。
 したがって、連続する3つの奇数の和は、中央の奇数の3倍である。

次の(1)から(3)までの各問に答えなさい。

(1) 説明1では、 $6n+9$ を $3(2n+3)$ と変形しています。このように変形するのは、次のことを示すためです。□①に当てはまる式と、□②に当てはまる数を書きなさい。

連続する3つの奇数 $2n+1$ 、 $2n+3$ 、 $2n+5$ の和が、中央の奇数を表す式である□①の□②倍であること。

(1)では、 $6n+9$ を $3(2n+3)$ と変形することの意味を上記の説明から読み取る問題となっている。しかし、本県でも、52.2%、全国でも57.4%の正答率であり、高くない。

(2)の問題は、右のように(1)で連続する3つの奇数であったものを連続する5つの奇数に発展させている。

(2) 二人は、連続する4つの奇数や5つの奇数の和について考えることにしました。若菜さんは、連続する5つの奇数には中央の奇数があることから、中央の奇数に着目して連続する5つの奇数の和について調べました。

1, 3, 5, 7, 9のとき $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5 \times 5$
 3, 5, 7, 9, 11のとき $3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 35 = 5 \times 7$

若菜さんは、これらの結果から次のことを予想しました。

予想2

連続する5つの奇数の和は、中央の奇数の5倍になる。

上の予想2がいつでも成り立つことを説明します。下の説明2を完成しなさい。

説明2

n を整数とすると、連続する5つの奇数は、 $2n+1$ 、 $2n+3$ 、 $2n+5$ 、 $2n+7$ 、 $2n+9$ と表される。それらの和は、

$(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + (2n+7) + (2n+9)$
 $=$

(2)でも、(1)と同様、数の性質を見付けて、それを説明するという授業での考察場面を設定し、問題にしている。文字の設定や最初の式まで示しているにもかかわらず、本県では正答率が57.0%、全国でも59.7%と十分ではない。加えて、本県の無解答率が19.0%と約2割の生徒が記述できていないことは、課題である。

(3)では、下のよう連続する4つの奇数の和が $2n+4$ の4倍となることを示し、 $2n+4$ が何を示すかを問う問題である。

(3) (中略)

そこで、拓斗さんは、 n を整数として、連続する4つの奇数を、 $2n+1$ 、 $2n+3$ 、 $2n+5$ 、 $2n+7$ と表し、それらの和を次のように計算しました。

拓斗さんの計算

$(2n+1) + (2n+3) + (2n+5) + (2n+7)$
 $= 2n+1 + 2n+3 + 2n+5 + 2n+7$
 $= 8n+16$
 $= 4(2n+4)$

選択問題であることから、本県でも、65.6%を超える高い正答率であるが、全国よりは4%低い。文字式の表している数量を問う学習は、引き続き丁寧に指導していく必要がある。

これらのことから、授業において、文字を用いて表現し、説明する方法を文字の置き方や変形など丁寧に理解させ、「文字を用いた式」を用いて説明することのよさを実感させていきたい。

4 「文字を用いた式」で説明する問題（第2学年）の指導のポイント

第2学年「文字を用いた式」では、「整式の加法等の文字式の計算」や「数量及び数量の関係性を捉え説明すること」、「目的に応じた式の変形」、「文字を用いた式を具体的な場面で活用すること」ができるようにする。「文字を用いた式で数量及び数量の関係性を捉え説明すること」に関しては、第1学年で、

数量の関係や法則などを文字を用いた式で表すことを学び、第2学年では、更に深め、文字を用いた式で数量及び数量の関係を捉え説明できることを理解し、文字を用いて式に表現し説明したり、式の意味を読み取ったりする力を身に付けることになる。

以下に「文字を用いた式による説明」の具体的な指導の流れとポイントを述べる。連続する3つの整数の和に関する性質を説明する課題を用いて指導上の留意点を述べる。

〔第1時（例）〕「文字を用いた式による説明」（連続する3つの整数の和）

主な学習活動	指導上の留意点
<p>【1 性質を発見・予想する。】</p> <p>○ いくつかの連続する3つの整数の和に共通する性質はないか考えさせる。</p> <p>例 $4+5+6=15$ $5+6+7=18$ $9+10+11=30$</p> <p>連続する3つの整数の和は、3の倍数になる。</p>	<p>○ 連続する3つの整数の意味を確認し、ある数を自分で決めさせ、その3つの数の和を求めさせる。いくつかの場合を求めさせ、共通した性質はないか考えさせる。</p> <p>○ 連続する3つの整数の和の例は、グループや全体などで取り上げて、複数の場合を提示してもよいが、性質の発見については、まずは、個で考えさせ、気付いたことをノートに記述させる習慣を付けさせたい。</p>
<p>【2 文字式での説明の必要性を確認する。】</p> <p>○ いくつかの例から見つけた性質がすべての場合で成り立つかどうかを示すためには文字を用いた式で説明することが必要だと理解する。</p>	<p>○ いくつかの数で調べて予想した性質は、すべての場合で言えるのか、言えるとすればその理由を聞き、文字式で表すことが必要であると理解させた上で、文字式による説明の学習につなげる。</p> <p>○ いくつかの場合を調べただけで成り立つとは言えない。このことは、今後の「証明」の学習にもつながるので、大歓迎したい。</p>
<p>【3 文字を用いて数量を表す。】</p> <p>○ 連続する3つの整数を文字で表す。もっとも小さい整数をnとすると、他の2数をnを用いて表す。$n, n+1, n+2$</p>	<p>○ 説明の理解を重点とし、連続しない文字の置き方等については、第2時以降で確認する。</p>
<p>【4 式を整理し目的に応じて変形する】</p> <p>○ 説明することがならに合わせて、文字式を変形する。</p> <p>$3n+3 \quad \dots \quad \text{ア}$ $= 3(n+1) \quad \dots \quad \text{イ}$</p>	<p>〔ポイント①〕</p> <p>アの式で整理する際、第1学年の文字を用いた式の計算において、項の意味が理解できていない生徒が$6n$としてしまうことがある。この場合は、$n+n+n+1+2$とし、まとめられる1次の項、数の項などの数学用語も用いて繰り返し確認する。</p> <p>〔ポイント②〕</p> <p>アからイの式変形についても丁寧に確認したい。平成31年度全国学力・学習状況調査の出題のように、$6n+9=3(2n+3)$や$10n+25=5(2n+5)$などの変形もある。</p> <p>小学校第4学年では、具体的な整数の計算において、第5学年では、小数の計算において分配法則を用いて計算する学習をしている。</p> <p>中学校においても、第1学年において、$15 \times (-5.5) + 15 \times (-4.5) = 15 \times (-10)$のように負の数においても、分配法則を利用して計算できるという学習をしている。文字を用いた式においても、これまでの数の計算がそのまま適用され、数と同じように計算できることを理解させ、分配法則を用いることで、計算が簡単に行えることを学び直しの機会として捉え、繰り返し丁寧に指導していきたい。</p> <p>〔ポイント③〕</p> <p>アからイへと式変形をすることの意味についても、確認する。本問題で$3(n+1)$という変形は、$3 \times (\text{整数})$の形にすることで、3の倍数という意味を示すことを理解させる。また、$()$の中の整数部分$n+1$の表す意味についても問い、nは整数だから$n+1$も整数であることに加えて、「3つの連続する中央の整数」であることを問い、考えたことを説明させたい。</p>
<p>【5 振り返りを行い、まとめをする。】</p> <p>○ 本時の学習を振り返り、学習したことを具体的に他者に説明する場を設定し、本時のまとめをする。</p>	<p>数学的活動の一つである「数学的な表現を用いて説明し、伝え合う活動」として、授業の最後に、「いくつかの数を具体的に調べ発見した性質はすべての場合で言えないこと。そのため、文字式を用いて示すことですべての場合においても成り立つことが言えること。」を、自分の言葉で他者に説明させたり、ノートに記述させたりする。</p> <p>また、本課題を振り返り、3の倍数ならば、$3 \times (\text{整数})$の形に分配法則を利用して変形することを確認した後、「2の倍数（偶数）ならば$2 \times (\text{整数})$、4の倍数ならば、$4 \times (\text{整数})$の形に変形することが必要だ」ということも説明させ、次時につなげたい。</p>

〔第2時以降（例）〕

この第1時後に取り組みさせる題材については、以下のようなものが考えられる。

整数 m , n を用いて
ア 連続する2つ偶数の和 $2n + (2n + 2)$
イ 連続する2つ奇数の和 $(2n + 1) + (2n + 3)$
ウ 連続する3つの偶数の和 $2n + (2n + 2) + (2n + 4)$
エ 連続する3つの奇数の和 $(2n + 1) + (2n + 3) + (2n + 5)$
オ 偶数と偶数の和 $2m + 2n$
カ 偶数と奇数の和 $2m + (2n + 1)$
キ 2けたの自然数を入れかえてできる自然数との和や差 $(10m + n) + (10n + m)$

第1時で、文字を用いた式での必要性を確認した後、第1時と異なる問題で、自ら取り組みさせる時間を設定する。ただ、上記の題材では、数が連続するア～エの場合と、連続するとは限らないオ～キの場合について、整数 m を別に用いる必要があるか戸惑う生徒も多い。

文字の置き方については、「連続した（続いた、連動した）」数がどうが判断することがポイントであることを理解させたい。「連続した」3つの整数や「連続した」偶数などの場合は、その最初の文字と連動するため、同じ文字を用いること、設定した文字とそうでない場合は、文字を変える必要があることをまず最初に確認する。

または、(偶数) + (偶数) = (偶数) を説明する問題での下のような「正しくない説明の例」を示し、誤りについて考えさせる学習も設定できる。

<p>mを整数とすると、2つの偶数は$2m$, $2m + 2$と表される。</p> $2m + (2m + 2) = 4m + 2$ $= 2(2m + 1)$ <p>$2m + 1$は整数であるから、2つの偶数の和は、偶数である。</p>

ここでは、2, 6のように連続しない偶数を説明できていないため、全ての場合について説明できていないという誤りを指摘させ、正しい説明に修正させる学習も考えられる。このように、文字の置き方については、丁寧に指導する必要がある。

説明を記述させる際には、初めは、前時の「文字を用いた式による説明」の記述などを参考にしながら、新たに見つけた数の性質が成り立つことを、すべて記述する学習に取り組みさせることも大事である。

全国学力・学習状況調査の問題でも、参考となる説明を提示し、その説明にならって記述する出題が多い。それにもかかわらず、正答率も低く、無解答率も高い。文字を用いた式で説明する問題は、過去5回程出題されているが、5割の正答率に届いていないものも多く、参考となる記述を基に、説明を考えさせるなどの段階を踏まえた指導を心掛けたい。

5 おわりに

各学校で諸調査結果を基に問題毎の分析をし、具体的な要因を探り、指導の改善を図る必要がある。さらに、その改善が図られているか確認しながら、授業を設計していくというサイクルは大切である。また、生徒が、授業以外で課題に出会った時に、自らの力で解決できるかという視点から、授業の改善や学力向上に向けた取組の見直しを図ることも必要である。単元末では、これまでの学習を生かし、自己解決させ、ノート等に記述させたり、他者に説明させたりする場面を設定するなど「数学的な表現を用いて説明させる活動」に取り組みさせたい。

—引用・参考文献—

- 文部科学省『中学校学習指導要領解説 数学編』平成29年7月
- 国立教育政策研究所・教育課程センター『平成31年度全国学力・学習状況調査報告書』令和元年7月

(教科教育研修課 本山 和仁)