http://www.edu.pref.kagoshima.jp/ (通巻第２１３１号)

指導資料 数 学 第162号

鹿児島県総合教育センター
令和４年10月発行

対象校種 高等学校 特別支援学校

「数学的な見方・考え方」を広く働かせる解法についてⅡ
-差分を活用したΣ計算の考え方-

◆ 「数学的な見方・考え方」を広く働かせることで，数学のよさを認識し，より数学に対する学ぶ意欲が高まる。
◆ 差分を活用したΣ計算の考え方は「数学的な見方・考え方」を広く働かせる解法の一つとして，また，思考力，判断力，表現力等の育成にも有効である。
＃数学的な見方・考え方　＃部分分数分解　＃差分を活用したΣ計算　＃深い学び

1 はじめに

「数学的な見方・考え方」について，高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説数学編理数編では次のように示された。

> 「数学的な見方・考え方」は，数学的に考える資質・能力を支え，方向付けるものであり，数学の学習が創造的に行われるために欠かせないものである。また，生徒一人一人が目的意識をもって問題を発見したり解決したりする際に積極的に働かせていくものである。

指導資料「数学第160号」で示したように，既知の知識及び技能から創造的に考察することで，新たな概念がつくられる。方程式や不等式が図形やグラフの関係性につながっていたり，予想していたことが思いもよらない形で一般化されたりと，「数学的な見方・考え方」を広く働かせることで，数学のよさを認識し，より数学に対する学ぶ意欲が高まる。また，単元横断的，教科横断的な創造性，日常生活や社会の事象についても数学的に捉えようとする態度の育成が期待される。さらに，新たな概念に触れることで，既知の知識や未知の事象においても，「数学的な見方・考え方」を広く働かせて考察しようとする態度が涵養されるものと考えられる。

2 差分を活用した算数の問題

「数学的な見方・考え方」を広く働かせ，思考力，判断力，表現力等を育成する解法を紹介する。まずは工夫した算数の問題の解法を紹介する。このような問題は中学入試でも扱われている。

【問題１】

次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$

(2) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}$

(3) $\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{15}+\dfrac{2}{35}+\dfrac{4}{77}+\dfrac{9}{220}$

(1)，(2)は基本的な計算であるが，(3)を同様に通分して計算をするのは面白みがない。(1)，(2)の計算結果により何かしらの気付きが得られれば，(3)の「数学的な見方・考え方」

を働かせた解法にたどり着く。(1)の解答は $\frac{1}{6}$，(2)の解答は $\frac{2}{15}$ である。それぞれの分子が1である分数の引き算を生徒たちにいくつか出題し，ある規則に気づくと，生徒たちの表情は発見した驚きや喜びに変わる。

文字で表すと以下のようになる。

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$$

これを部分分数分解といい，これにより

$$\frac{2}{35}=\frac{1}{5}-\frac{1}{7},\quad \frac{4}{77}=\frac{1}{7}-\frac{1}{11}$$

と変形することができる。よって，(3)は以下のような解法にたどり着く。

(3)の解答

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6}+\frac{2}{15}+\frac{2}{35}+\frac{4}{77}+\frac{9}{220}\\
&=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\\
&\qquad+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{20}\right)\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{20}\\
&=\frac{9}{20}
\end{aligned}$$

これも差分を活用した解法の一つである。

3　差分を活用したΣ計算の考え方

数学Bの「数列」の単元におけるΣ計算について，差分を活用したΣ計算の解法を紹介する。Σ計算の基本を活用した解法であり，この理解により，更に既習内容の理解が深まる。

【差分を活用したΣ計算の解法】

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)\\
&=\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}-\sum_{k=1}^{n}a_k\\
&=(a_2+a_3+a_4+\cdots\cdots+a_n+a_{n+1})\\
&\qquad-(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n)\\
&=a_{n+1}-a_1
\end{aligned}$$

【問題２】は，【問題１】の応用として教科書等にも紹介されている部分分数分解による差分の考え方である。

【問題２】

次の式を計算せよ。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)(k+2)}$

(1)の解答

部分分数分解により

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

よって，$a_k=\frac{1}{k}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}&=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})\\
&=a_1-a_{n+1}\\
&=1-\frac{1}{n+1}\\
&=\frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

(2)の解答

部分分数分解により

$\frac{2}{k(k+2)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}$ であるから

$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

よって，$a_k=\frac{1}{k(k+1)}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)(k+2)}&=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})\\
&=a_1-a_{n+1}\\
&=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&=\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

【問題２】(2)は連続した自然数の積が規則的に並ぶことから活用できる解法である。この問題から次のような問題の解法にもつなげることができる。

【問題３】

次の式を計算せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

(1)の解答

$k=\dfrac{1}{2}k\{(k+1)-(k-1)\}$ と変形できるので

$a_k=(k-1)k$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$$
$$=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_1)$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(2)の解答

$k^2+k=\dfrac{1}{3}k(k+1)\{(k+2)-(k-1)\}$

と変形できるので

$a_k=(k-1)k(k+1)$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$$
$$=\frac{1}{3}(a_{n+1}-a_1)$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(3)の解答

(1)(2) より

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)-\sum_{k=1}^{n} k$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(1)，(3)のΣの基本公式もこのようにして証明することができる。さらには【問題４】のような問題も差分を活用することで，思考力，判断力，表現力等の育成につながる。

【問題４】

次の式を計算せよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2\cdot3^k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot2^k$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{99}\log_{10}\left(1+\frac{1}{k}\right)$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!$

(1)の解答

$a_k=p\cdot3^k$ とし，$2\cdot3^k=a_{k+1}-a_k$ とおくと

$p=1$ のとき成り立つので，$a_k=3^k$

よって，

$$\sum_{k=1}^{n} 2\cdot3^k=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$$
$$=a_{n+1}-a_1$$
$$=3^{n+1}-3$$

等差数列の和の公式の証明にも使われる。

(2)の解答

$a_k=(pk+q)\cdot2^k$ とし，$k\cdot2^k=a_{k+1}-a_k$ とおくと $p=1$，$q=-2$ のとき成り立つので，

$a_k=(k-2)\cdot2^k$

よって，

$$\sum_{k=1}^{n} 2\cdot3^k=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$$
$$=a_{n+1}-a_1$$
$$=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$$

教科書の例題等に出題される問題である。

(3)の解答

$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\log_{10}\frac{k+1}{k}$$
$$=\log_{10}(k+1)-\log_{10}k$$

であるから，$a_k=\log_{10}k$ とおくと

$$\sum_{k=1}^{99}\log_{10}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{99}(a_{k+1}-a_k)$$
$$=a_{100}-a_1$$
$$=2$$

(4)の解答

$a_k=(pk+q)\cdot k!$ とし，$k\cdot k!=a_{k+1}-a_k$ とおくと，$p=0$，$q=1$ のとき成り立つので，
$a_k=k!$
よって，
$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$$
$$=a_{n+1}-a_1$$
$$=(n+1)!-1$$

このように応用問題においても，差分を活用できるか思考することで，数学的な見方・考え方が更に育まれる。

4　差分を活用したΣ計算の問題の作成

a_k を設定することで，問題も容易に作成することができる。

【作成例①】

$a_k=\dfrac{1}{k!}$ とおくと
$$a_k-a_{k+1}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$$
$$=\frac{k}{(k+1)!}$$
これより，
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ を計算せよ。
という問題が作成できる。

【作成例②】

パスカルの三角形の性質から
${}_kC_2+{}_kC_3={}_{k+1}C_3$
よって $a_k={}_kC_3$ とおくと
$a_{k+1}-a_k={}_kC_2$
これより，
$\displaystyle\sum_{k=3}^{n}{}_kC_2$ を計算せよ。
という問題が作成できる。

どちらも初見ではなかなか解法を思い付かない問題である。差分を意識して「数学的な見方・考え方」を働かせると解法にたどり着く。こういった問題を大問形式で誘導することで，差分の考え方に気付かせ，授業等で活用する方法もある。

差分について，実際に当センター調査研究の研究協力員として，鹿児島県立鹿児島南高等学校の北園教諭が授業で扱った。差分の理解を深め，問題演習を行った後に，生徒が問題を作成するという内容であった。作成された問題の中には，教員でもなかなか解法に気付かないような問題もあったので，紹介したい。

【生徒作成問題】

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+1)k!$ を計算せよ。

解答

$k^2+3k+1=(k+1)(k+2)-1$
よって，
$(k^2+3k+1)k!=(k+2)!-k!$
つまり $a_k=k!$ とおくと
$(k^2+3k+1)k!=a_{k+2}-a_k$
したがって，
$$\sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+1)k!=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+2}-a_k)$$
$$=a_{n+2}+a_{n+1}-2!-1!$$
$$=(n+2)!+(n+1)!-3$$

この問題はこれまでの学びから深い学びへとつながる問題であり，特に数学の得意な生徒がこの問題を解きたいと必死に考えていたことが印象的であった。

5　おわりに

「数学的な見方・考え方」を広く働かせることで，数学的に考える資質・能力が更に伸びたり，新たな資質･能力が育まれたりして，「数学的な見方･考え方」が一層豊かになる。

第 160 号と同様に，今回のような問題及び解法を通して，「数学的な見方・考え方」を広く働かせ，多くの問題や解法に触れることで，数学のよさを実感してほしい。

-参考文献-

○　文部科学省『高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説　数学編　理数編』

（教科教育研修課　　當　太輝）

※　本資料は，UD フォントを使用しています。