

指導資料



鹿児島県総合教育センター

算数・数学 第124号

—小学校，特別支援学校対象—

平成22年10月発行

数学的な表現を重視した算数的活動の工夫

新学習指導要領が平成20年3月に告示され、算数科の改訂では、体験的・作業的な活動や考えを説明し伝え合う活動などにおいて、算数のよさを十分生かした算数的活動を充実させ、基礎的・基本的な知識・技能を確実に身に付けさせるとともに、数学的な思考力や表現力を育成し、学んだことを生活や学習に活用する態度を育てることを重視している。中でも数学的な思考力や表現力を育成するために、特に根拠を明らかにし筋道を立てて体系的に考えることや、言葉や数、式、図、表、グラフなどの相互の関連を理解し、それらを適切に用いて問題を解決したり、自分の考えを分かりやすく説明したり、互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすることなどの指導を充実することが述べられている。

そこで、本稿では、言葉や数、式、図、表、グラフなどの数学的な表現を適切に用いて問題を解決させたり、説明し伝え合わせたりする指導の在り方について具体的な例を基に述べる。

1 数学的な表現について

算数科では、様々な数学的な表現を駆使しながら数理的な事象を表記し、問題の解決や原理・法則の理解を進めている。例え

ば、『子どもが、はじめに2人遊んでいました。後から3人遊びに来て、みんなで5人になりました。』といった場面を理解するには、まず現実的な表現として言葉で表現する。次に、視覚的に分かりやすいおはじきなどの半具体物を用いてその関係を操作しながら表す。また、おはじきを○などの簡単な図に置き換えて表したり、数を用いて2と3で5とか、数と式で $2 + 3 = 5$ と表したりする。このような表現から、数理事象の理解やその処理の仕方などを通して数学的な考え方のよさを学ぶことになる。子どもの学習をより確かなものにするために、相手に自分の考えを説明する活動や相互に考えを伝え合う活動を学習指導の中に積極的に活用し、それらの活動を充実させることが大切である。

ここで数学的な表現について、岡田樟雄(2007)の考えを基にして述べると、次のようなものである。

数学的な表現には、数式・文字式のような数学に固有な記号はもちろんのこと、それ以外に表、グラフ、線分図などの図、さらには「平行四辺形」などの用語や、「直線上の点」などという数学に固有な言い表し方も含まれる。数学的な表現は、このような広い意味での記号による表現を意味している。

～教科研究数学No.184(2007) 学校図書出版社～

2 数学的な表現様式とその置き換え(変換)について

数学的な表現として記号で表したことを数式などに置き換える表現様式として、中原忠男(1995)は、構造的に5つにまとめている。

- ・現実的表現：実物を用いて、現実に即した操作や実験を行う表現
 - ・操作的表現：おはじきなどの半具体物をモデルとして操作する表現
 - ・図的表現：絵、図、グラフ等による表現
 - ・言語的表現：日常言語による表現
 - ・記号的表現：算数で使う記号(数、式など)を中心とした表現
- 「算数・数学教育における構成的アプローチの研究」中原忠男(1995)

異なる表現様式間で置き換えたり、同じ表現様式間で置き換えたりするなど相互の関連付けを図った授業展開を教師が工夫していくことで、さらに子どもの数学的な思考力や表現力が育っていくものと考えられる。

(1) 異なる表現様式間の置き換え

異なる表現様式間における置き換えとして、主に次のようなものがある。

- ① 実物の量(現実的表現)を半具体物に置き換えて表現(操作的表現)する。
- ② 図(図的表現)を見て、言葉で説明(言語的表現)する。
- ③ 図(図的表現)を見て、式(記号的表現)に表す。
- ④ 言葉で説明(言語的表現)したことを、式(記号的表現)に表す。
- ⑤ 言葉で説明(言語的表現)したことを、図(図的表現)に表す。
- ⑥ 式(記号的表現)を見て、その式の意味を説明(言語的表現)する。
- ⑦ 式(記号的表現)で表されたことを、図(図的表現)に表す。
- ⑧ 式や図で表されたことを、現実に即した操作に置き換える。 など

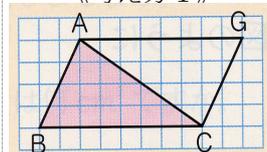
これらの置き換えを効果的に授業展開の中で設定した活動を次に紹介する。

《例1 図的表現を言葉に置き換える活動》

＜第5学年 図形の面積＞

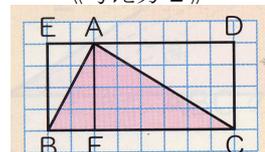
※ 三角形の求積公式を導き出していく中で、三角形を既習の長方形や平行四辺形に変形させていく学習である。

《考え方1》



同じ大きさの三角形をもう一つ合わせて平行四辺形を作ります。求めた平行四辺形の面積は、三角形の面積の2倍になります。

《考え方2》



同じ大きさの三角形を二組作ると長方形になります。できた長方形は、もとの三角形の2倍の広さです。

※ 図的に表現された《考え方1》と《考え方2》を言葉で表現させる。特に、「半分」と「2倍」の表現に着目して図形でどの部分が相互に説明し合う活動を設定することが大切である。

さらに、言葉での説明を式に表すという置き換えの活動を設定していくことができる。例えば、次のようにして式に表現させていく。

《考え方1では》

「半分」という言葉に着目させ、平行四辺形の面積の半分になる。そこで、式に $\div 2$ が必要となることを図などから押さえる。

式で表すと、「平行四辺形の面積 $\div 2$ 」

$$\text{底辺} \times \text{高さ} \div 2$$

《考え方2では》

「2倍」という言葉に着目させ、長方形の面積は、三角形の面積 $\times 2$ の関係となることを確実に押さえる。

式では、「長方形の面積 $=$ 三角形の面積 $\times 2$ 」から「三角形の面積 $=$ 長方形の面積 $\div 2$ 」

その後、三角形の用語である「底辺」とか「高さ」をたてや横と関係付けながら置き換えていく。

そして、どちらの考えも三角形の面積は、「底辺 \times 高さ $\div 2$ 」になることに帰着させる。

このように展開していくことで、数学的な考えのよさに気付かせていくことができる。

また、子どもの実態や教師の意図によっては、式の意味を図で説明させる置き換え(⑦の変換)を設定することも可能である。

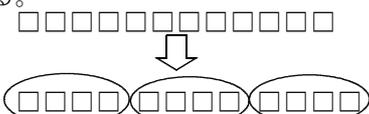
《例2 式を操作的表現に置き換える活動》

＜第2学年 かけ算(1)＞

- ※ 同じ数ずつのものが何個あるとき、全部の数を求める計算としてかけ算が導入される。加法場面を新たな乗法の演算として導いていく題材である。
- ※ かけ算の式($4 \times 3 = 12$)が構成され、意味付けがなされた後に、次のような活動を設定する。

「 $4 \times 3 = 12$ 」で表された式から、全部の数をブロックなどを用いて同じ袋に入れる活動

- ① 12個のブロックを同じ数(4こ)ずつ袋に入れる。



- ② 4こずつ、3つの袋に入れました。全部の数は、12個です。
- ③ 4や3の数の意味を、袋に入れる操作から考えさせる。
- ④ 他に、 $2 \times 5 = 10$ の場面も同じように操作させる。
- ※ このように操作的表現をさせることで、式の意味をイメージすることができ、かけ算の生まれたよさも実感させることができる。
 - ※ この活動は、第3学年での「わり算」の導入にも活用することができる。

(2) 同じ表現様式内での置き換え

同じ表現様式内での置き換えとして、主に次のようなものがある。

- ① 他者が説明したことを、自分の言葉で言い換える。(言語的表現内)
- ② 他者が説明したことを、周りの他者に再現する。(言語的表現内)
- ③ 他者が書いた式と同じ意味の式を探す。(記号的表現内)
- ④ 2つの式を1つの式にまとめる。(記号的表現内)
- ⑤ 他者のかいた絵と似ている図を探す。(図的表現内)
- ⑥ 他者の用いた図を、自分の図に活かす。(図的表現内) など

言語的表現内での置き換えとして具体的な例をかけ算九九表から決まりを見つけ出す学習を基に、次に紹介する。

ここでは、決まりを見つけ出し、その決まりを用いていくことや乗法のよさに気付かせることをねらいとしている。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

- ※ 九九表から、気付いた決まりを子どもに説明させる。

ア 横に見ると、その段の数ずつ増えている。
イ 同じ答えがいくつ出してくる。

ウ 同じ答えを探したら、 2×3 と 3×2 がある。
エ 他にも前の数と後の数を入れ替えた式ができる。

- ※ 教師は、子どもの気付きから、言い換えた表現に気付かせる。
例えば、イの気付きを言い換えた説明は、ウの説明であることから、 2×3 と 3×2 の他に同じようなことがいえる数を見つけさせる。そこで、かけ算九九表の決まりの一つに $3 \times 4 = 4 \times 3$ のように前の数と後の数を入れ替えても答えは同じになること(交換法則)を導き出していく。

また、様々な表現のよさを子どもに理解させるためには、次のような算数の表し方のよさカードを教師や子どもが持っておき、用いられた場でそれぞれの表し方のよさを価値付けしていくことなどが考えられる。

＜算数の表し方のよさ＞

図	<ul style="list-style-type: none"> ・問題の意味を理解しやすい。 ・解き方を具体的に説明しやすい。 ・様々な見方や考え方ができる。
表	<ul style="list-style-type: none"> ・対応がはっきりと表われ、変化の様子をよく見ることができる。 ・対応する数の関係や決まりを見付けやすい。
グラフ	<ul style="list-style-type: none"> ・変化する量を表しやすく、量を比べやすい。 ・変化の様子を具体的に読み取ることができる。 ・目的に応じていろいろな形で表せる。
式・記号や用語	<ul style="list-style-type: none"> ・事柄の関係を簡単に表せる。 ・説明が短く、簡単になる。 ・問題の意味を正しく伝えることができる。 ・式を変形しやすく、能率的に考えることができる。 ・図や表と関連付けて、考えやすくすることができる。 ・多くの人に伝えやすい。

3 様々な表現様式を活かした算数的活動の工夫

工夫

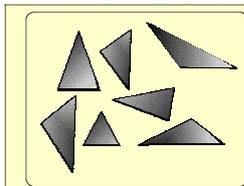
第5学年 「図形の合同と角」

～2 三角形と四角形の角 (3/10)～

<本時の目標>

- 図で表されたことを式に表したり、式から図に表し直したりして三角形の内角の和が 180° であることを用いて四角形の内角の和を求めることができる。

<1 学習課題を受け止める>



三角形をいくつか敷きつめて四角形を作ろう。できた四角形の4つの角の大きさの和は、何度になるか調べよう。

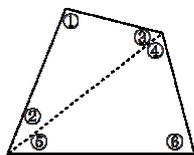
- ※ 四角形の4つの角の大きさの和について、三角形の3つの角の大きさの和が 180° であることに着目させ類推させていく。

<2 学習問題を立てる>

四角形の4つの角の大きさの和を求めるには、どのようにしたらよいだろうか。

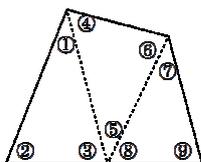
- ※ 解決の見通しをもつことに困難さを感じている子どもには、「三角形の数に着目するとよいのではないか」という提案をする。

<3 各自で調べる>



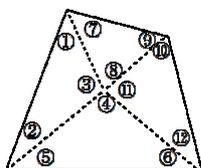
(考え方1)

- 三角形を2つ用いて四角形を作ることができる。
- 三角形の3つの角の大きさの和は 180° だから式で表すことができる。



(考え方2)

- 三角形を3つ用いて四角形をつくることができる。
- 三角形の3つの角の大きさの和は 180° だから式で $180^\circ \times 3$ になる。



(考え方3)

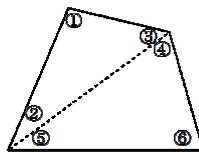
- 三角形を4つ用いて四角形を作ることができる。
- 三角形の3つの角の大きさの和は 180° だから式で $180^\circ \times 4$ になる。

<4 各自の考えを発表し、相互に検討する>

- ※ ここでは、四角形の4つの角の大きさの和が 360° であることを求めさせるだけでなく式(記号的表現)と図(図的表現)とを関連付けさせながら数学的な思考力を育てていく。

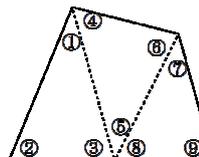
そこで、三角形を2つ用いた考え方と三角形を3つ用いた考え方と比較させていく。

《考え方1》



三角形を2つ用いて四角形を作りました。三角形が2つだから式で表すと $180^\circ \times 2 = 360^\circ$ となります。四角形の4つの角の大きさの和は 360° になりました。

《考え方2》



三角形を3つ用いて四角形を作りました。三角形が3つだから式で表すと $180^\circ \times 3 = 540^\circ$ となりました。

- ※ 同じ四角形であるのに内角の和が 360° と 540° と異なった結果から「どうして結果が違うのだろうか?」と問いかけ、三角形の数だけでなく、図と式と合せて考える必要があると子どもの解決への意識を焦点化させる。

考え方2の図では、4つの角以外の角(③, ⑤, ⑧の部分)も合わせているので 180° を引かなければならない。式では、 $180^\circ \times 3 - 180^\circ$ となる。考え方1では、引く部分がないので $180^\circ \times 2$ の式でよい。

- ※ 三角形を4つ用いた考えも図を基にして式に表現させる。そして、考え方1と考え方2との違いを式に表現させて検討させる。

考え方3 : $180^\circ \times 4 - 360^\circ = 360^\circ$
 考え方2 : $180^\circ \times 3 - 180^\circ = 360^\circ$
 考え方1 : $180^\circ \times 2 = 360^\circ$

- ※ 式の表現を上のようにまとめ、五角形や六角形へのつながりをもたせる。また、 $\times 3$ や -180° 、 $\times 4$ や -360° の意味を図を基に説明させることで理解を深めさせていく。

- ※ 他の形の違う四角形についても調べさせ、帰納的にまとめていく。

図を用いた表現を言葉を用いて説明させたり、記号を用いた表現を図と関連させて説明させたりするなどして、算数的活動を工夫することができる。今後、さらに子どもの数学的な思考力や表現力を確実に育てていくために、教師の創意工夫を活かした授業が求められている。

〔参考文献〕

東洋館出版社 『算数授業研究その不易と流行』 全国算数授業研究会

文部科学省『小学校学習指導要領解説—算数編—』(教科教育研修課)