

指導資料

算数・数学 第126号

 鹿児島県総合教育センター

— 高等学校, 特別支援学校対象 —

平成22年10月発行

中学校・高等学校の指導内容の系統性を重視し、数学的活動を位置付けた学習指導の工夫

平成20年1月の中央教育審議会答申において、算数・数学科の改善の基本方針が示された。具体的な内容として、数量や図形に関する基礎的・基本的な知識・技能の確実な定着を図る観点から、そのための改善の方向として内容の系統性を重視した指導の工夫を行うことなどが述べられている。また、数学的な思考力・表現力を高めたり、算数・数学を学ぶことの楽しさや意義を実感させたりするために、算数的活動・数学的活動を生かした指導を一層充実する必要があることが述べられ、これらの内容を踏まえて、高等学校数学科では、目標や科目構成及び内容についての改善が行われた。

そこで本稿では、基礎的・基本的な知識及び技能を確実に身に付けさせるために、中学校・高等学校の指導内容の系統性を重視し、数学的活動を位置付けた学習指導の工夫について、「図形と計量」の授業を例に述べる。

1 系統性を生かした学習指導

学習活動では、これまで学習してきたことと関連付けて考えたり、根拠を基に筋道立てて考え表現したりすることが大切である。このような学習活動においては学習内

容のつながりを、明確に生徒に意識させるために、指導する校種の指導内容だけでなく、前後の校種の指導内容の系統性を把握しておくことが重要である。系統性を重視した指導を行うことで、個に応じた指導の充実を図ることができ、また、生活や次の学習に活用させていくことができるなどの効果が期待される。

2 「図形と計量」における系統性

高等学校における「図形と計量」に関する中学校の指導内容は次の通りである。

学年	内 容
第1学年	<ul style="list-style-type: none">平面図形<ul style="list-style-type: none">ア 基本的な作図の方法とその活用イ 図形の移動空間図形<ul style="list-style-type: none">ア 直線や平面の位置関係イ 空間図形の構成と平面上の表現ウ 基本的な図形の計量
第2学年	<ul style="list-style-type: none">基本的な平面図形と平行線の性質<ul style="list-style-type: none">ア 平行線や角の性質イ 多角形の角についての性質図形の合同<ul style="list-style-type: none">ア 平面図形の合同と三角形の合同条件イ 証明の必要性と意味及びその方法ウ 三角形や平行四辺形の基本的な性質
第3学年	<ul style="list-style-type: none">図形の相似<ul style="list-style-type: none">ア 平面図形の相似と三角形の相似条件イ 図形の基本的な性質ウ 平行線と線分の比エ 相似な図形の相似比と面積比及び体積比の関係オ 相似な図形の性質を活用すること

学年	内 容
第3学年	<ul style="list-style-type: none"> 円周角と中心角 <ul style="list-style-type: none"> ア 円周角と中心角の関係とその証明 イ 円周角と中心角の関係を活用すること 三平方の定理 <ul style="list-style-type: none"> ア 三平方の定理とその証明 イ 三平方の定理を活用すること

これらの内容を踏まえ、高等学校における「図形と計量」に関する指導では、中学校で学習した平面図形や空間図形における基礎的な性質等についての知識、数学的な見方・考え方を活用できるような工夫を行うことが必要である。また、生徒が学ぶことの意義や有用性を実感を伴って理解できるように、概念や解決方法などを見つけ出し作り出したりする活動を指導過程に位置付け、指導内容に応じて、随時中学校の内容を振り返りながら学習内容の確実な理解を図る必要がある。

3 数学的活動の指導の在り方

(1) 中学校・高等学校における数学的活動の関連性

新学習指導要領では、高等学校で指導に関する三つの配慮事項を、中学校で三つの数学的活動を示している。高等学校の配慮事項と中学校の数学的活動との関連性をまとめたものが表1である。

表1 数学的活動と配慮事項との関連性

	中学校第2, 3学年の数学的活動	高等学校の配慮事項
①	既習の数学を基にして、数や図形の性質などを見だし、発展させる活動	自ら課題を見だし、解決するための構想を立て、考察・処理し、その過程を振り返って得られた結果の意義を考えたり、それを発展させたりすること。
②	日常生活や社会の中で、数学を利用する活動	学習した内容を生活と関連付け、具体的な事象の考察に活用すること。
③	数学的な表現を用いて、根拠を明らかにし筋道立てて説明し伝え合う活動	自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりすること。

表1からわかるように、高等学校の配慮事項は、今回の改訂における中学校の数学的活動を踏まえたものになっている。高等学校では配慮事項を踏まえ、具体的には次のような活動などが考えられる。

表2 具体的な活動例

- | | |
|-----|--|
| I | 設定した課題を、既習事項や公理・定義等を基にして数学的に考察・処理する活動 (表1の①) |
| II | 見いだした数学的性質等を論理的に系統化し、数学の新しい理論・定理などを構成する活動 (表1の①) |
| III | 数学的知識を構成するに至るまでの思考過程を振り返る活動 (表1の①) |
| IV | 身近な事象を取り上げそれを数学的に対処し、数学的な課題を設定する活動 (表1の②) |
| V | 考察の対象となった最初の身近な事象に戻って考えたり、他の具体的な事象の考察などに活用したりする活動 (表1の②) |
| VI | 問題の解答を板書させ、どのように考えて解いたかを説明させたり、どのようにすればよりよい表現になるかを考えさせたりする活動 (表1の③) |
| VII | 問題の解決で、誤った解答に対しては、どこが誤りか、誤っていると言える理由は何か、どこをどのように修正すれば正答になるかなどを説明させる活動 (表1の③) |

上記の活動例を参考にしながら、授業で行う活動がどの配慮事項に当たるかを意識して授業を展開し、その活動が十分生かされるようにしていきたい。

(2) 数学的活動の工夫

数学的活動を指導計画に位置付ける際には「どのような力を身に付けさせるための活動であるのか」など、活動のねらいを明確にする必要がある。また、ねらいを効果的に達成できる活動内容や方法を考えることが大切である。例えば次のような工夫が考えられる。

【工夫1】 生徒が主体的に取り組む活動となるような課題の内容を設定する。

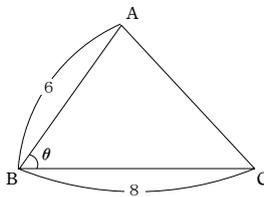
【工夫2】 課題を解決することによりどのようなことが分かるのか、どのような学習につながっていくのかを考えさせる場を設定する。

【工夫3】 思考過程や結果の根拠等を他者に説明する場を設定する。

(3) 「図形と計量」における数学的活動の例
 三角比を利用して三角形の面積を求める公式を導く際に、既習内容の定義・定理等を基にして、数学の新しい理論・定理などを導く活動が考えられる。

【問題例】

$AB=6$, $BC=8$,
 $\angle B = \theta$ がわかっているとき、 $\triangle ABC$ の面積は求められるだろうか。
 (工夫1)



【数学的活動例①】

頂点Aから、対辺BCに垂線を引き、その線分の長さを x とおいて、 x を θ を用いて表し、式変形の過程を図を用いて説明する活動

(表2のI, VI)

活動のねらい

直角三角形を見いださせることで、既習内容に結びつけて考えられることのよさを実感させたり定義に基づいて式変形を行わせることで、基礎的な知識・技能を活用させる。

活動をうながす発問例

- ・ 面積を求めるとき、あとどのような条件が分かれば求められますか。
- ・ 高さを x としたとき、 x を θ を用いて表わすことができますか。もしできるとしたら、その方法を図を用いて説明してみよう。(工夫2, 3)
- ・ 三角形の面積を求める式 $S = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \sin \theta$ において、 $6 \sin \theta$ は何を表しているか図を用いて説明してみよう。(工夫2, 3)

【数学的活動例②】

θ が鈍角である場合の三角形を作図し、その三角形の面積を求めたり、文字を用いて一般的に表わす活動 (表2のII, V)

活動のねらい

文字を用いて一般的に表すことができるよさや式の意味を読み取り考え方のよさを実感させる。

活動をうながす発問例

θ が 90° より大きくても、求めた式は利用できそうですか。(工夫2)

4 学習指導の工夫例

三角比の指導においては、定理や性質に関する一般的な説明からはじめるのではなく、具体例を基に、成り立つ数学的な関係や性質を推測させ、それらの関係や性質の一般性について考察させるなどの授業の工夫が必要となる。例えば、余弦定理の指導では、具体例として二辺の長さとその間の角の大きさが分かっているいくつかの三角形を提示し、中学校の既習事項である三平方の定理を用いることで残りの辺の長さを求めることができることを体験させた後で、一般化するなどの工夫が考えられる。また、三平方の定理の理解が十分でない生徒に対しては、プレゼンソフトを用いたICTの活用などの工夫も考えられる。

次に「図形と計量」の単元において、余弦定理の内容を取り扱った授業の工夫について紹介する。

余弦定理 (数学I) 1年生

【問題例】 三角形ABCにおいて、余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \text{ の, } 2bc \cos A \text{ を図形的に説明してみよう。ただし, } \angle A \text{ は鋭角とする。}$$

ほとんどの教科書において余弦定理の証明は、頂点Cから辺ABに垂線を引き、中学校の既習事項である三平方の定理を用いて証明を行う場合が多い。ただし、これでは $2bc \cos A$ が何を意味しているのか、具体的な理解がなされないままになってしまいがちである。そこで、図を用いた証明方法の学び直しを行い、それを活用することで $2bc \cos A$ の意味を図的に捉え、三平方の定理との関連を図った授業を行う。

【授業の工夫例】

時間	学習内容と生徒の活動・反応例 (T 教師の発問, S 生徒の反応例)	教師の働きかけと配慮事項 ※評価の観点
5分 (導入)	1 前時に学習した余弦定理の確認を行う。 ・ 二辺の長さとその間の角の大きさがわかっているならば、残りの辺の長さを求めることができる。	・ 余弦定理を用いる問題を提示する。 ・ ペアで証明方法を説明させる。(表2のVI)
15分 (展開)	S [中学校で学習した三平方の定理を利用すると、余弦定理を導くことができた。] 2 本時の学習課題を確認する。 T 三角形ABCにおいて、余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ の $2bc \cos A$ は何を表わしているのだろうか。ただし、 $\angle A$ は鋭角とする。 T まず、等積変形の考えを用いて三平方の定理の証明を考えてみよう。頂点Aから垂線を引き、等積変形の考えを用いて、互いに説明してみよう。	・ ワークシートを配布し、本時の課題を説明する。 ※ 関心・意欲・態度 ・ 具体的な事象の考察に対して、示されている方法に関心を持ち、その方法で積極的に考えようとする。 ・ 課題が理解できない場合は、補足説明を行う。 ・ 三平方の定理の学び直しを行う。(等積変形, 回転移動, 合同条件) ・ 等積変形の考え方を、図を用いて互いに説明させ合う。(表2のVI) ・ 図を用いて考えられるように準備をする。

ア $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形において、それぞれの辺の長さを一辺とする正方形をつくり、頂点Aから辺BCに垂線を引く。
イ 垂線によって、辺BCを一辺とする正方形は二つの長方形①と②に分かれる。
ウ 等積変形や回転移動の考えを用いて、長方形①と正方形③、長方形②と正方形④の面積がそれぞれ等しいことを説明する。

- ・ お互いの説明の状況を確認しながら、プレゼンソフトを用いて説明する。
- ・ 回転移動や合同の考え方も含めて、一つ一つ確認しながら説明する。

25分 (展開)	T 次に、三角形ABCを鋭角三角形で考えてみよう。同じように等積変形の考えを利用してみよう。 S [・ Pの部分やGの部分の面積と等しくなるのはどこだろう。 ・ 大きさを考えると、PとR、GとKが等しくなりそうだ。 ・ TとUの部分の面積は、どんな式で表されるのだろうか。] T [・ 頂点Cから辺ABへ引いた垂線と、辺ABとの交点をDとして、直角三角形ACDで、ADの長さを $b \cos A$ で表してみよう。 ・ 長方形TとUの面積は、どういう式で表されるだろうか。] S [・ ADの長さが $b \cos A$ だから、長方形Tの面積は $c \times b \cos A$ で、長方形Uの面積は $b \times c \cos A$ となる。] (R+K)の部分の面積は、一辺の長さがaの正方形より、 a^2 (P+T)の部分の面積は、一辺の長さがcの正方形より、 c^2 (U+G)の部分の面積は、一辺の長さがbの正方形より、 b^2 R=P, K=Gであり、TとUの部分の面積は、 $c \times b \cos A, b \times c \cos A$ で同じになる。よって、三つの正方形の面積の関係式は $a^2 = b^2 + c^2 - (c \times b \cos A + b \times c \cos A) = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$	・ それぞれの頂点から、対辺に垂線を引いてあるワークシートを準備する。 ・ 直角三角形が何個できているかを確認する。 ・ どこの部分の面積が等しくなりそうか、予想をさせ、結果の見通しを立てさせる。(表2のI) ・ 直角三角形ACDにおいてADの長さがbと $\cos A$ で表わすことができることに気付かせる。 ※ 知識・理解 ・ 直角三角形において、斜辺と余弦を用いて他辺の長さを求めることができる。 ・ (R+K)の部分の面積が、P, G, T, Uを用いてどう表わすことができるか考えさせ、ペアで説明させ合う。(表2のIII, VI) ※ 数学的な見方・考え方 ・ 三つの正方形の面積について、大小関係やその間に成り立つ関係を理解できる。 ・ 「ベクトル」の単元においても、余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ を利用して、「内積」という値を計算することができる。 ・ 図的表現と記号的表現の関連を図る。
-------------	---	---

本稿では、中学校・高等学校の指導内容の系統性を重視し、数学的活動を位置付けた学習指導の工夫について述べてきた。これらの例を参考に、系統性を重視した学習指導の一層の工夫を図って頂きたい。

【参考文献】

文部科学省『中学校学習指導要領解説数学編』平成20年
『高等学校学習指導要領解説数学編・理数編』平成21年

(教科教育研修課)