

指導資料



鹿児島県総合教育センター

算数・数学 第128号

— 中学校、特別支援学校対象 —

平成23年10月発行

事象を数理的に考察し表現する能力を高める指導の在り方

— 図形の証明指導における「数学カード」活用を中心とした指導を通して —

平成22年度全国学力・学習状況調査の結果をみると、数学的な表現を用いて説明したり、証明したりする問題の平均正答率は低い傾向にある。中でも、「事象を数理的に解釈し、成り立つ事柄の特徴を数学的な表現を用いて説明すること（平行四辺形になることを証明するための根拠となる事柄を書く問題）」の県の平均正答率は、約7%と極めて低い。このことから、中学校数学科の目標にある「事象を数理的に考察し表現する能力を高める」ことの指導を一層重視する必要があると考える。

そこで、本稿では図形の証明指導において、事象を数理的に考察し表現する能力を高めるにはどのような指導をすればよいか、具体的な指導事例を通して述べる。

1 事象を数理的に考察し表現する能力を高めるとは

算数・数学教育では、事象を数理的に考察し表現する能力を高めることをすべての校種で大切にしている。中でも中学校では、日常的なものにとどまらず、様々な事象を数理的にとらえ、考察し、表現したり、処理したりする能力を高めることをねらいとした指導が行われる。

事象を数理的に考察することは、主に次

の二つの場面で行われる。

- ① 日常生活や社会における事象を数学的に定式化し、数学の手法によって処理し、その結果を現実にも照らして解釈する場面
- ② 数学の世界における事象を簡潔な処理しやすい形に表現し、適切な方法を選んで能率的に処理したり、その結果を発展的に考えたりする場面

したがって、各場面の特性をとらえ、事象を数理的に考察する能力を高めることが必要である。また、事象を数理的に考察する過程では、次のような表現が必要となる。

- ① 推測したり、見出したりした数や図形の性質などを的確に表す。
- ② ①の妥当性などについて根拠を明らかにして筋道立てて説明する。
- ③ 既習内容を活用する手順を順序よく的確に説明する。

これらの表現を行うことにより、生徒は、一層合理的、論理的に考えを進めることができるようになったり、より簡潔で的確な表現に質的に高めることになったり、新たな事柄に気付いたりすることなどが可能になる。また、数理的に考察したことを振り返って確かめることも容易になる。

このように、様々な事象を数理的にとらえ、考察することと、考察したことを表現することを十分関連させた指導は今後ますます重視していかなければならない。

2 図形の証明における指導方法

全国学力・学習状況調査の結果から、図形の証明指導における課題と指導の手立ての例をまとめると次のようになる。

(【 】は、指導の手立ての例)

- ① 図と対応させながら、図形の性質や条件などを言葉により表現するとともに、記号を用いて表す。
→【**数学カードの作成・活用**】
- ② 図と対応させながら、図形の性質や条件などの記号を用いた表現を言葉に表す。
→【**数学カードの作成・活用**】
- ③ 根拠を明らかにして、筋道立てて説明し伝え合う活動をする。
→【**学習形態の工夫**】
- ④ 証明された性質や条件を用いて、新たな性質を見出したり、証明したりするために用いることができるように数学的な表現に慣れさせる。
→【**学習環境の整備**】

これらの手立てを講じ、効果的に指導を進めるために、次の2点についてそれぞれ具体例を示す。

- (1) 根拠を明らかにして、説明したり表現したりする力を育成する指導方法

説明や証明の際には、論証の根拠となる事柄を十分に理解し、身に付ける必要がある。根拠

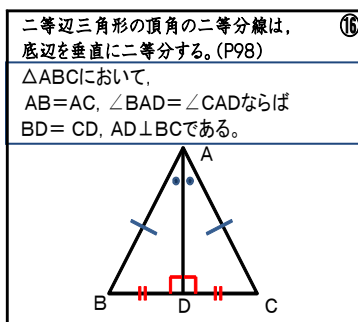


図1 数学カード(例)

となる事柄は、図形の学習の基礎的・基本的な知識・技能であるので、いつでも振り返ることができ、活用することができるようにしなければならない。

そこで、図形の性質や定理などを学習した後は、1枚の数学カード(図1)と

してまとめさせる。このカードは、授業で学習した図形の性質や定理などを言葉と記号を使ってまとめさせたもので、カードに通し番号を付け、ファイル化して、説明や証明の際には、この番号を示し、論証の根拠となる事柄として活用できるようにさせる。

さらに、図形の性質や定理などを体系的に身に付けさせたり、証明に用いられる特有の表現の仕方に慣れさせたりするために学習環境を整備する。具体的には、本時の学習活動を進めるために必要となる数学カードを教室に掲示したり、廊下やオープンスペース等に掲示したりし

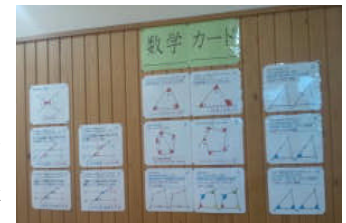


写真1 数学カードの掲示

て、生徒が日常的に見ることができるようにすることで、数学的な表現への抵抗感を軽減する(写真1)。

- (2) 論理的な考え方を育てる指導方法

帰納的な考え方や類推的な考え方は一般的な法則を発見していく大切な方法であるが、その事柄が正しいことを確かめるには演繹的な考え方をを用いて説明(証明)されなければならない。

演繹的な考え方を多く用いるのは、中学校第2学年において、対角線の性質、平行線の性質、三角形の合同条件等を根拠として、図形の証明をする学習である。

これらの考え方を習得させるための手だての一つとして、数学カードを活用



写真2 ペア学習等の様子

した学習形態の工夫がある。

図形の証明の学習においては、自分の考えと他者の考えを伝え合い、自分の考えが正しいかを確認めたり、自分の考えと他者の考えとを比較したりして、お互いの考え方を練り上げさせる活動を十分取り入れる必要がある。そのためには、

「自力解決→相互解決（ペア学習，グループ学習）→自力解決」の学習活動による授業を展開し、論証の根拠として数学カードを活用して、意見や考えを交換できるようにする（写真2）。

次に、これらを踏まえて指導の実際について述べる。

3 指導の実際

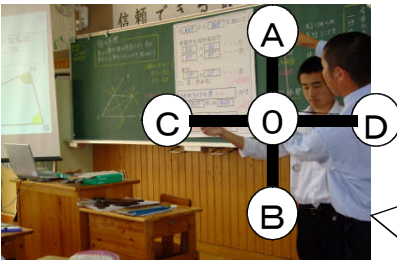
(1) 単元名 証明とそのしくみ

(2) 本時の目標 (1 / 2)

証明の意味と、仮定から結論を導く証明の仕組みについて理解することができる。

(3) 本時の実際 【伊佐市立大口中学校(現：鹿児島大学附属中学校)山崎晃教諭の実践から】

過程	時間	主な学習活動	指導上の留意点
導入	5分	1 5分間小テストで既習内容を確認する。 2 第1学年の復習である角の二等分線の作図をする。	1 既習内容の確認をさせる（三角形の合同条件）。 ※ プロジェクター，スクリーンの使用 2 ワークシートを配布し，角の二等分線の作図をさせる。
		<div data-bbox="497 869 831 1108" data-label="Image"> </div>	<div data-bbox="895 1041 1412 1115" data-label="Text"> <p>数学カードを用いて，前時の学習を振り返らせる。</p> </div>
展開	3分	3 角の二等分線の作図により，本当に角が二等分されたのかどうかについて考える。 (反応例)「二等分されることを以前学習した。」 (反応例)「切る，折り曲げる，角度を測るなどすればよい。」 4 論証により解決していくことを理解する。 5 「本時の目標」をワークシートに記入する。	3 作図と同じモデルを用いて，折ったり，切って重ね合わせたりすることなどにより，生徒の思考が深まるようにさせる。 「この作図で本当に角は二等分されたのだろうか？」 「本当にそうであるか確認する方法はないだろうか？」 ※ 角の二等分線の拡大図を使用 4 論証により説明することのよさを伝え，意欲を喚起させる。 5 本時の目標を板書する。
		<div data-bbox="288 1541 831 1615" data-label="Text"> <p>今まで学習してきたことの中から，本時の証明に使えるような内容がないかを探させる。</p> </div>	<div data-bbox="863 1525 1422 1637" data-label="Text"> <p>本時の目標 角の二等分線の作図により，角は本当に二等分されるのかを確認めよう。</p> </div>
閉	37分	6 作図から分かること，確認したいことを明確にする。 7 課題解決に向けての見通しを立てる。(数学カードで既習を確認する。)	6 証明の根拠となる重要な部分であるため，時間をかけて丁寧に確認させる。 7 数学カードを活用 し，既習内容を確認しながら課題解決の見通しを立てさせる。
		<div data-bbox="268 1794 858 1928" data-label="Text"> <p>数学カードの⑩は，「合同な図形では，対応する角の大きさ，対応する辺の長さが等しいこと」をまとめてあるので，根拠として使うことができることに気付かせる。</p> </div>	<div data-bbox="847 1883 1054 2063" data-label="Image"> </div>
		<div data-bbox="268 1951 831 2063" data-label="Text"> <p>生徒が互いに，根拠を明らかにして，筋道立てて説明し伝え合う学習を通して，表現する能力を次第に高めていく。</p> </div>	<div data-bbox="1070 1816 1406 2056" data-label="Diagram"> <p>合同な図形では対応する線分の長さは等しい。(P8) 四角形ABCD ≡ 四角形EFGHならば AB=EF, BC=FG, CD=GH, AD=EHとなる。</p> </div>

	<p>8 既習内容を根拠としながらワークシートに自分の考えを記入する。</p> <p>9 ペア等で考えを確認する。</p> <p>10 ワークシートを完成し、説明する。</p>	<p>8 机間指導により、つまづいている生徒に対する支援を行う。</p> <p>9 <u>ペア学習やグループ学習により、自分の考えと他者の考えを比較</u>させる。</p> <p>10 <u>数学カードを活用して</u>、根拠を基に説明できるようにさせる。</p>
終末	<p>11 本時のまとめとして、用語の意味を理解する。</p> <p>12 次時の予告を聞く。</p>  <p>OAとOBは、ゴムになっていて、伸ばすことができるが、OCとODはリボンなので伸びない。このとき、$OA=OB$、$OC=OD$であれば、どのようなことがいえるかを次の時間に考えていくことを知らせる。$AC=BD$などを見つけ出し、<u>数学カード</u>を基に、根拠を明らかにして証明することが目標である。</p>	<p>11 「証明」、「仮定」、「結論」の用語の意味理解させる。</p> <p>12 具体物を用いて次時の学習課題を提示し、身の回りの生活との関連を図る。 ※ リボン、ゴムの使用</p>

(4) 授業後の生徒の変容

授業後に二つの調査を行った。「根拠を基に証明を書くことができたか」という質問では、「とてもよくできた」、「まあまあできた」と答えた生徒の割合は、92.3%であった(図2)。

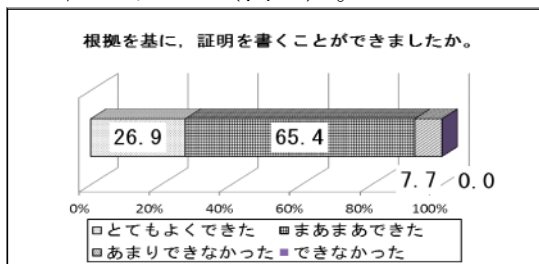


図2 授業後の評価①

また、「ペア学習では、自分の考えを伝えたり、相手の考えを聞いたりすることはできたか」という質問に、「とてもよくできた」、「まあまあできた」と答えた生徒の割合は、84.6%であった(図3)。

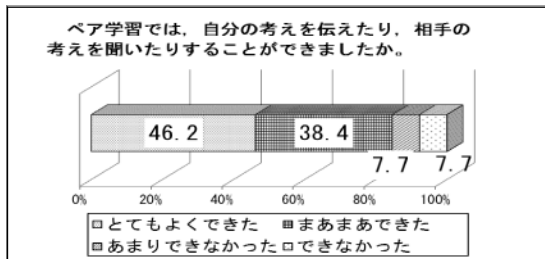


図3 授業後の評価②

生徒の感想の中には、「根拠をもとに証明を書くことができた」など肯定的な記述が見られた。また、評価テストの結果も極めて高いものであった。

図形の証明指導において、事象を数理的に考察し表現する能力を高めるために、数学カードを作成するとともに、それを活用して学習環境を整備したり、学習形態を工夫したりするなどの手立てを用いた指導方法は、生徒の理解を進めるために効果があったと考える。

生徒が、図形の証明を学習することへの困難さを克服し、根拠を明らかにして説明する力や論理的な思考力を一層伸ばせるように、指導方法の工夫・改善に取り組んでいただきたい。

—引用・参考文献—

- 「数学的活動を促す授業を求めて」
明治図書 京極邦明 著
- 「小学校学習指導要領解説 算数編」
平成20年8月 文部科学省
- 「中学校学習指導要領解説 数学編」
平成20年9月 文部科学省
- 「平成22年度 全国学力・学習状況調査【中学校】報告書」
平成22年10月 文部科学省

(教職研修課)