

<h1 style="font-size: 2em;">指導資料</h1> <p>鹿児島県総合教育センター 平成28年4月発行</p>	<h1 style="font-size: 2em;">数 学 第143号</h1>	
	対象 校種	幼稚園 小学校 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">中学校</span> 高等学校 <span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">特別支援学校</span>

## 数学のよさを実感させる文字式の指導 — 「速算法」や「和算」の利用を通して—

数学的活動を通じた指導に触れながら、「速算法」や「和算」と文字式を関連付け、数学のよさを実感できる幾つかの指導事例を紹介する。

### 1 「速算法」と「和算」について

「速算法」とは、その名のとおり暗算で即座に答えを出す計算方法である。例えば、「 $74 \times 76$ 」のように、「十の位の数が同じで、一の位の数同士を加えると10になるような二桁同士の整数の掛け算」では、速算法を使うと「5624」という答えを短時間で算出することができる。

また、「和算」は、江戸時代、関孝和に代表されるような数学の俊才家などを中心に発達していった学問である。作成した問題は「算額」として神社に奉納され、庶民が楽しみながら解くことで数学の世界に触れ合う機会があったことが推察できる。代表的な和算である「旅人算」や「出会算」、「さっさ立算」、「薬師算」などの問題を物語風につくり、互いに解決していった江戸時代の人々の俊才ぶりには驚かされるものがある。

これらの「速算法」や「和算」は、中学

校数学で学習する文字式や方程式を利用して説明していくことが可能であり、文字式のよさに触れながら数学的活動を發揮させるのに有効なものである。

### 2 数学的活動を通じた指導

中学校数学における数学的活動については、「生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学に関わりのある様々な営み」のことを指す。中学校学習指導要領解説数学編には、表1のように示されている。

表1 数学的活動

	第1学年	第2・3学年
ア 数や図形の性質などを見いだす活動	既習の数学を基にして、数や図形の性質などを見いだす活動	既習の数学を基にして、数や図形の性質などを見いだし発展させる活動
イ 数学を利用する活動	日常生活で数学を利用する活動	日常生活や社会で、数学を利用する活動
ウ 数学的に説明し伝える活動	数学的な表現を用いて自分なりに説明し、伝え合う活動	数学的な表現を用いて、根拠を明らかにし筋道立てて説明し、伝え合う活動

身の回りの事象を説明するに当たり、どのような知識・技能・考えを、どのように使うかを、生徒自身に見いださせることで数学的活動が充実したものになる。

「速算法」や「和算」は、既習事項を基に課題を解決した後に、条件を変えさせるなどしながら発展的に課題を解決させることのできる教材であり、数学を活用して考えたり判断したりしようとする態度を育成するという数学科の目標に迫る内容が含まれている。また、数学的な表現を用いて、筋道立てて他者に説明する活動も含まれているので、数学的活動を充実させていくのに適した題材である。

### 3 「速算法」と文字式

下は、中学校第3学年「数と式」における「速算法」のよさに気付かせることのできる一例である。「十の位の数が同じで一の位の数の和が10である二桁の自然数の積を計算する方法（図1）」の速算法の仕組みを文字式を用いて明らかにするものである（図2）。

$$\begin{array}{r}
 74 \\
 \times 76 \\
 \hline
 5624
 \end{array}$$

$7 \times (7 + 1)$        $4 \times 6$

図1 積の「速算法」の方法(1)

二数を  $10a+b$ ,  $10a+c$  とおき、二数の積を表していく。

$$(b+c=10 \cdots \textcircled{1})$$

$$(10a+b)(10a+c)$$

$$=100a^2+10a(b+c)+bc \cdots \textcircled{2}$$

②に①を代入すると

$$\textcircled{2}=100a^2+100a+bc$$

$$=100a(a+1)+bc$$

となり、図1の状況を文字式を用いて説明したことになる。

#### 図2 文字式による仕組みの説明(1)

さらに、条件を変えるなどして、新たな速算法「十の位の数の和が10で、一の位の数が同じである二桁の自然数の積を計算する方法」の速算があるのではないかということを考え（図3）、予想を立てたり文字式を用いてその仕組みを明らかにしたりすることが考えられる（図4）。

$$\begin{array}{r}
 47 \\
 \times 67 \\
 \hline
 3149
 \end{array}$$

$4 \times 6 + 7$        $7 \times 7$

図3 積の「速算法」の方法(2)

二数を  $10a+c$ ,  $10b+c$  とおき、二数の積を表していく。 ( $a+b=10 \cdots \textcircled{1}$ )

$$(10a+c)(10b+c)$$

$$=100ab+10c(a+b)+c^2 \cdots \textcircled{2}$$

②に①を代入すると

$$\textcircled{2}=100ab+100c+c^2$$

$$=100(ab+c)+c^2$$

となり、図3の状況を文字式を用いて説明したことになる。

#### 図4 文字式による仕組みの説明(2)

このように、身の回りの事象から発見的にきまりを見付け、そのことを文字式を用いて演繹的に説明していく過程を通して数学のよさを実感させたい。そのためには、これらの活動を通して、生徒が文字式を使うことのよさを認識できることが大切である。

#### 4 「さっさ立算」と方程式

「さっさ立算」は、古くからある数当て遊戯の一つである。次は、中学校第2学年の連立方程式の終末場面の課題学習で行うことを想定した題材である。

- ① 基石を20個と、皿を2枚準備する。
- ② 一人が後ろを向いている状態で、別の人が「さっ」と声を掛けながら、基石を1個か2個ずつ取る。取った基石が1個なら左の皿に、2個なら右の皿に分ける。これを、全ての基石がなくなるまで続ける。
- ③ 後ろを向いている人は、掛声（の回数）だけで左右に分けられた基石の数を当てる。

この事象の面白さは、「さっ」という掛声だけを聞いて、2枚の皿にそれぞれ何個ずつの基石があるかを答えることである。もちろん個々の状況で連立方程式を使って解決することもできる。

「さっ」という掛声の回数を基に、瞬時に答えを出す仕組みを把握するために聞こえてきた回数を $k$ 回とおき、連立方程式をつくり、解いていくことで、その仕組みを説明することができる（図5）。

「さっ」という掛声が $k$ 回聞こえてきたとし左皿（1個入り）の声を $x$ 回、右皿（2個入り）の掛声を $y$ 回とおくと、

$$\begin{cases} x + y = k & \dots ① \\ x + 2y = 20 & \dots ② \end{cases}$$

という式が立つことになる、

①②を解くと  $y = 20 - k$  …③ となる。

「さっ」の掛声の回数を20から引けば、2個入りの皿の「さっ」の回数がかかる。

このことから、例えば、「さっ」という掛声が、12回聞こえたとする、

③より、 $y = 20 - 12 = 8$ 。

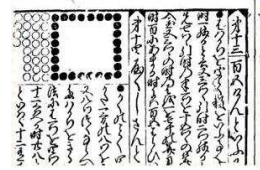
$8 \times 2 = 16$ （個）が2個入りの皿に入っている基石の数になり、 $20 - 16 = 4$ （個）が1個入りの皿に入っている基石の数になる。

図5 さっさ立算の仕組

このように、事象の説明に連立方程式を利用できることに気付かせ、積極的に活用する態度を育成していきたいと考える。

#### 5 「薬師算」と文字式

この題材は、1631年に吉田光由が書いた



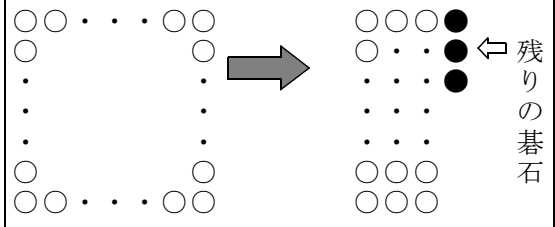
「塵劫記（図6）」に 図6 塵劫記から記載されているものである。文字式を用いて課題を解決するといった数学のよさを味わわせたい。そこで、中学校第2年生の「文字式」の課題学習で授業を行うことを想定し、次のような学習課題を設定した。

下の図のように基石を並べて、正方形の形をつくった。

正方形の右隅の一行を残し、その他の基石は全てを崩して、残した列にそろうまで並べ直す。すると、何個かの基石が端数として残る。

この端数を聞くだけで、元の基石の総数を当てることができるが、どのようにすればよieldろうか。

ただし、正方形の一辺の基石の個数は、5個以上とする。



基石を扱っているうちに、この問題が考え出されたと言われている源氏物語の中の主人公のエピソードなどを通して課題を提示し、生徒の興味・関心を高めていく。次ページに、授業の展開例の一部を記す。

生徒の活動・表現例	時間 (分)	形態	指導上の留意点																												
1 学習課題を把握する。	5	一斉	1 基石を利用して実際に操作しながら学習課題を把握させる。 <ul style="list-style-type: none"> <li>薬師算についての逸話を話し、興味・関心を高めさせる。</li> <li>基石の一边が5個のとき、余りが1個になることを黒板で例示する。</li> </ul>																												
2 学習課題に取り組む。 <予想される表現例> 正方形の一边の基石の数をm, 基石の端数をnとおく。 ア mとnの関係を表に表す。 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>m</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr> <tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> </table> 表から $n = m - 4$ の関係を見いだす。 $m = n + 4$ となり、 基石の総数は、 $4(n + 4 - 1) = \underline{4n + 12}$ イ 基石の端数nと基石の総数との関係を表に表す。 基石の総数を出した後、実際に並べてからの端数を調べ、表にする。 <table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr> <tr><td>総数</td><td>16</td><td>20</td><td>24</td><td>28</td><td>32</td><td>36</td></tr> </table> 総数とnの関係は、nが1個増えると総数は4個ずつ増えるので、基石の総数は、 $4(n - 1) + 16 = \underline{4n + 12}$ ウ m個ずつの2列を取り並び、残りの基石の個数を調べると $2(m - 2)$ 個となる。 これから1列分のmを引くと、 $2(m - 2) - m = m - 4$ これは端数に等しく、 $m - 4 = n$ となるので、 $m = n + 4$ となる。 基石の総数は、 $4(n + 4 - 1) = \underline{4n + 12}$ エ 文字式を用いて総数を式で表す。 基石の総数は、 $4(m - 1)$ である。	m	5	6	7	8	9	10	n	1	2	3	4	5	6	n	1	2	3	4	5	6	総数	16	20	24	28	32	36	15	個	2 ノートに、課題解決の過程や疑問となることをできるだけ多くメモしておくよう指示する。 <ul style="list-style-type: none"> <li>生徒の反応や状況を評価簿を用いて把握し、その後の指導に生かす。</li> <li>評価の視点                &lt;関心・意欲・態度&gt;                基石を用いたり、ノートにいろいろな場合をかいたりして、端数と総数の関係を粘り強く見いだそうとしている。                &lt;数学的な見方や考え方&gt;                具体的な事例だけでなく、文字を用いるなどして、一般化しながら解決している。</li> </ul> また、崩してつめたとき、m個が3列できるので端数は、 $4(m - 1) - 3m$ を引くと、 $4(m - 1) - 3m$ となるので、計算すると $m - 4$ となる。 したがって、4列目の端数をnとおくと、 $n = m - 4$ となり、 $m = n + 4$ となる。 基石の総数は、 $4(n + 4 - 1) = \underline{4n + 12}$ オ 図をかいて、不足した個数を見いだしながら計算する。2列分はm個ずつ。3列目には、2個不足しているので4列目の分から2個加える。 4列目は、2を引いて、 $(m - 4)$ 個となる。したがって、4列目の端数は $n = m - 4$ となり $m = n + 4$ 基石の総数は、 $4(n + 4 - 1) = \underline{4n + 12}$
m	5	6	7	8	9	10																									
n	1	2	3	4	5	6																									
n	1	2	3	4	5	6																									
総数	16	20	24	28	32	36																									
3 自己の考えをグループ内で出し合いながら解決していく。	20	グループ	3 必要に応じて補充指導を行う。解決の際、疑問が出た場合には、積極的にその疑問を出し合って解決するように指示する。 <ul style="list-style-type: none"> <li>文字式がうまく使えないグループに対しては言葉の式をつくらせた後、文字に置き換えさせる。</li> </ul>																												

このような題材の解決に、文字式や連立方程式を使えることに生徒自ら気付かせるようにし、主体的に課題を解決しようとする態度を育成していくことが重要である。「速算法」や「和算」を題材として示し、数学の便利さや歴史を実感させながら、数

学的活動の楽しさや数学のよさを実感させたい。

—参考文献—

- 文部科学省「中学校学習指導要領解説数学編」平成20年，教育出版
- 伊藤洋美 著 「おもしろ和算」平成20年，明治図書  
(教科教育研修課)