指導資料 数学 第157号

鹿児島県総合教育センター
令和３年４月発行

対象校種	高等学校 特別支援学校

三平方の定理とピタゴラス数の探究
―「数学的な見方・考え方」を楽しむ―

中学校で学んだ三平方の定理は，証明方法が幅広く，一般的にも活用されるなど，「数学的な見方・考え方」を楽しむことのできる探究に最適な定理である。ここでは三平方の定理のいくつかの証明とそれに関連するピタゴラス数について紹介する。

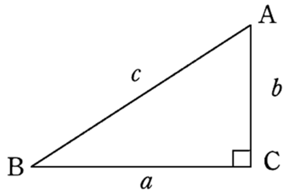
１　はじめに

「数学的な見方・考え方」を働かせながら，知識及び技能を習得したり，習得した知識及び技能を活用して探究したりすることにより，知識は生きて働くものとなり，技能の習熟・熟達につながるとともに，より広い領域や複雑な事象の問題を解決するための思考力，判断力，表現力等や，自らの学びを振り返って次の学びに向かおうとする力などが育成される。三平方の定理やピタゴラス数はこのような探究に最適な題材であり，この探究を通して，「数学的な見方・考え方」が更に確かで豊かなものになっていくと考えられる。

２　三平方の定理

直角三角形の直角をはさむ２辺の長さを a，b，斜辺の長さを c とすると，次の関係が成り立つ。

$$\boxed{a^2+b^2=c^2}$$



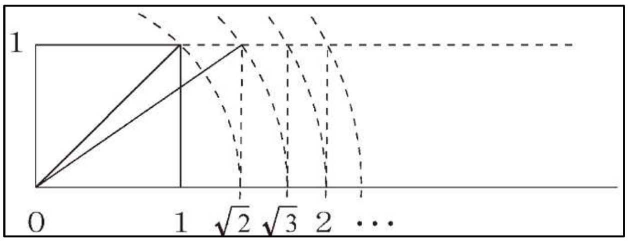
三平方の定理は直角三角形の３辺の長さの関係を表しており，数学において重要な定理であり，測量の分野でも用いられるなど活用される範囲が極めて広い定理である。また，古代エジプトでの縄張り師の話や，古代ギリシャの数学者・哲学者ピタゴラスによって定理としてまとめられたとされている話など，この定理にまつわる歴史的な背景や逸話も数多く残されている。

数学では，座標平面における２点間の距離や，長方形の対角線の長さ，あるいは，円錐の高さを求めることなど，平面図形や空間図形の計量について考察する際に，多くの場面で三平方の定理が活用される。一見して直角三角形が存在しないような場面においても，その中に解決に必要な直角三角形を見付けたり，補助的に作り出したりすることで，必要な線分の長さを求めることができる。

日常生活や社会では，三平方の定理を利用する場面として，地図上に表された標高差のある２地点間の距離，あるいは，山の頂上や人工衛星などの地上から離れた地点から見える範囲を求めることがある。このように，求めたいものを直接測らなくとも三平方の定理を利用することによって導くことができる。

また，$\sqrt{2}$ や$\sqrt{3}$ など正の整数の平方根を表す線分は，**図**のような正方形と三平方の定理を活用して作図し，これによって数直線上に

整数の平方根を定めることができる。

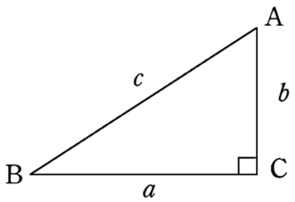


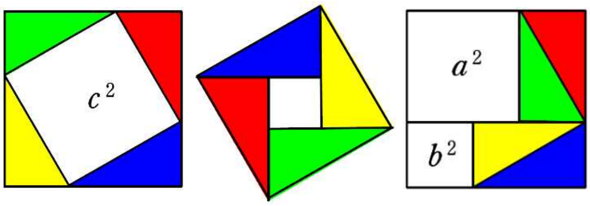
図

３　三平方の定理の証明

三平方の定理の証明は数多く存在する。その中でも，生徒にとって理解しやすく，「数学的な見方・考え方」を楽しむことができるような証明を紹介したい。ここで取り上げた証明は，生徒が既習事項を活用して三平方の定理が証明できることを知り，そこから「数学的な見方・考え方」を広げて，深い学びにつなげられるようなものとなっている。

（1）　正方形の面積を用いた証明





ア　　**イ**　　**ウ**

△ABC を４つ用いて，白抜きの部分の面積に着目する。

アのとき　$c^2 = (a+b)^2 - \frac{1}{2}ab \times 4$

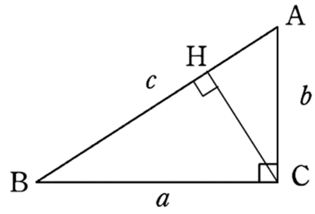
イのとき　$(a-b)^2 = c^2 - \frac{1}{2}ab \times 4$

それぞれにより三平方の定理が証明できる。

また，**ア**の２つの三角形を**ウ**のように移動することで，**ア**，**ウ**のそれぞれの白抜きの部分の面積が等しいことからも証明できる。

この証明では，**ア**，**イ**，**ウ**のように図形を並べることで，視覚的にイメージでき，理解しやすくなる。授業でも広く活用される証明の方法である。

（2）　三角形の相似を用いた証明



△ABC において，点 C から辺 AB に垂線を下ろした交点を H とおく。このとき，△CBH，△ACH，△ABC は相似である。

相似比は $a : b : c$，面積比は $a^2 : b^2 : c^2$

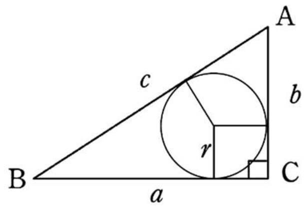
よって，実数 k を用いて，

$$a^2k + b^2k = c^2k$$

したがって，$a^2 + b^2 = c^2$となり，三平方の定理が証明できる。

相似な図形の面積比を利用した解法であり，相似な図形を演習する際に効果的な問題として活用できる。ここから更にこの図を用いて，線分の比を求めたり，相加平均・相乗平均の関係の証明に活用したりするなど，多くの問題に発展させることができる。この１問から展開した授業を行うことで，深い学びへとつなげることができる。

（3）　△ABC に内接する円を用いた証明



△ABC に内接する円の半径を r とおくと

（△ABC の面積）＝ $\frac{1}{2}r(a+b+c)$ …　①

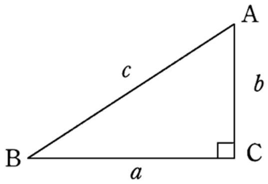
であることと，△ABC が直角三角形のとき

$2r = a + b - c$ …　②

であることはよく知られている。△ABC の面積は $\frac{1}{2}ab$ と表せることも含めて，②を①に代入することにより，三平方の定理が証明できる。

内接する円の性質を使ったこの証明は，習得した知識が生きて働く活用法である。生徒が図形と計量の単元を学んだ後，この証明に取り組ませることで，知識の定着をより確かなものにすることができる。

(4)　ベクトルを用いた証明



垂直といえば，「ベクトルの内積が０になる」というフレーズが頭に浮かぶ。これを三平方の定理の証明に利用する。

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$$

両辺を平方すると

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=\left|\overrightarrow{CB}\right|^2-2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\left|\overrightarrow{CA}\right|^2$$

ここで，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$ を利用すると，三平方の定理が証明できる。

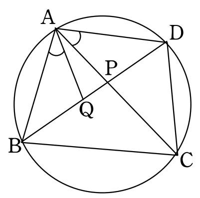
「始点を変える」，「２つのベクトルが垂直ならば，内積は０」というベクトルの基本的な性質をうまく利用した証明である。

(5)　トレミーの定理を用いた証明

トレミーの定理については教科書に掲載されておらず，その証明はあまり周知されていないが，解法の一つとして広く活用されている。トレミーの定理の証明はいくつかあるが，中学校で既習の知識を用いてできる証明を紹介する。

トレミーの定理

AB･DC＋AD･BC=AC･BD を示す。



図のように∠BAQ＝∠DAP となる点 Q をとると，△ABQ∽△ACD より

AB：AC＝BQ：CD

よって，AB･CD＝AC･BQ　…　①

また，△AQD∽△ABC より

AD：AC＝QD：BC

ゆえに，AD･BC＝AC･QD　…　②

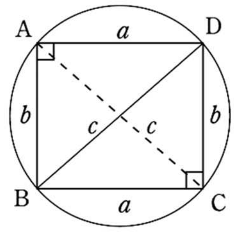
①，②の両辺をそれぞれ足すと

AB･CD＋AD･BC＝AC･(BQ+QD)

＝AC･BD

このように，トレミーの定理は証明される。

相似の証明の演習問題としても良問であり，なおかつ導いた定理も数学的に美しいと言われる。



右図のような円に内接する長方形で考えると，トレミーの定理で三平方の定理は簡単に証明できる。

４　ピタゴラス数

直角三角形の各辺の長さが自然数である辺の組をピタゴラス数という。その中でも，例えば（3，4，5）や（5，12，13）のように最大公約数が１のものを原始ピタゴラス数という。それではピタゴラス数は他にどのようなものがあるかを以下に示す。

(1)　奇数の和を用いる場合

1＝1

1＋3＝4

1＋3＋5＝9

1＋3＋5＋7＝16　…①

1＋3＋5＋7＋9＝25　…②

奇数の和は平方数になるということはよく知られている。①を②に代入することで，16＋9＝25 つまり（3，4，5）のピタゴラス数が発見できる。

（5，12，13）については

1＋3＋5＋…＋23＝144　…③

1＋3＋5＋…＋23＋25＝169　…④

③，④から 144＋25＝169 より，（5，12，13）のピタゴラス数が発見できる。

一般化すると

1＋3＋5＋…＋$(2n-1)$＝n^2

1＋3＋5＋…＋$(2n-1)$＋$(2n+1)$＝$(n+1)^2$

これより

$$n^2+(2n+1)=(n+1)^2 \quad \cdots\ (*)$$

ここで，$2n+1$ が平方数となるとき，三平方の定理は成り立つ。$2n+1$ は奇数であるから自然数 m を用いて，$2n+1=(2m+1)^2$ とおくと，$n=2m^2+2m$　…　⑤ と表せる。

(*)に⑤を代入して

$(2m^2+2m)^2+(2m+1)^2=(2m^2+2m+1)^2$

となり，$(2m^2+2m,\ 2m+1,\ 2m^2+2m+1)$ というピタゴラス数が示された。

例えば $m=1$ のときは（3，4，5），$m=2$ のときは（5，12，13）の組が示される。

（2）　連続する２整数を用いる場合

（3，4，5）や（5，12，13）を見ると，連続する２整数が含まれる。連続する２整数を用いたピタゴラス数を一般化してみよう。

自然数 n を用いて

$$(n+1)^2-n^2=2n+1$$

前頁の(*)と同じ式であるが，次のように変形してみよう。

$$(n+1)^2-n^2=(n+1)+n$$

右辺が奇数の平方数となればよい。

例えば右辺が 49 のとき，25＋24＝49 より（7，24，25）という連続する２整数を用いたピタゴラス数が表される。この式だと多くのピタゴラス数を見付けることができる。

（3）　乗法公式を用いる場合

乗法公式より，

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$

両辺をそれぞれ引くと

$$(x+y)^2-(x-y)^2=4xy$$

ここで自然数 $m,\ n$ を用いて，

$x=m^2,\ y=n^2$ とおくと，

$$(m^2+n^2)^2-(m^2-n^2)^2=(2mn)^2$$

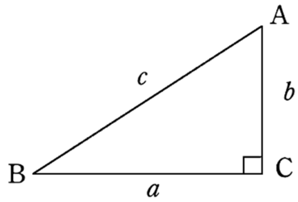
つまり

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2 \quad \cdots(**)$$

これより，$(m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2)$ というピタゴラス数が示された（$m>n$）。

例えば $m=2,\ n=1$ のときは（3，4，5），$m=3,\ n=2$ のときは（5，12，13）の組が示される。$(m^2-n^2,\ 2mn,\ m^2+n^2)$ は全てのピタゴラス数を表すことができる。その証明は多くの文献に様々な方法で紹介されているのでぜひ参考にしてほしい。

５　ピタゴラス数の性質



ピタゴラス数は次のような性質をもつ。

（ⅰ）$a,\ b$ の一方は３の倍数

（ⅱ）$a,\ b$ の一方は４の倍数

（ⅲ）$a,\ b,\ c$ のいずれかは５の倍数

（ⅰ）～（ⅲ）を，合同式を使って証明する。

$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$ において，$a=m^2-n^2$, $b=2mn$, $c=m^2+n^2$ とし，$(a,\ b,\ c)$を原始ピタゴラス数とすると，$a,\ c$ は奇数より，$m,\ n$ の偶奇は一致しない。これよりb は４の倍数となり，（ⅱ）が示された。

また，$\mathrm{mod}\,3$ において，

$m\equiv 0$ または $n\equiv 0$ のとき，$b\equiv 0$

$m\equiv \pm1$ かつ $n\equiv \pm1$ のとき，$a\equiv 0$

これより，（ⅰ）が示された。

さらに，$\mathrm{mod}\,5$ において，

$m\equiv 0$ または $n\equiv 0$ のとき，$b\equiv 0$

$m\not\equiv 0$ または $n\not\equiv 0$ のとき，$m^4\equiv 1$，$n^4\equiv 1$

よって，$ac=m^4-n^4\equiv 0$

したがって，$(a,\ b,\ c)$は原始ピタゴラス数であることから，（ⅲ）が示された。

６　おわりに

既存の知識を異なる視点で捉えることで，新たな考え方が広がる。日常生活と数学との関連についても興味をもち，深い学びにつながる。数学とは終わりのない学びであり，ワクワクの止まらない冒険である。ぜひ三平方の定理とピタゴラス数の探究を通して,「数学的な見方・考え方」を楽しんでほしい。

－参考文献－

文部科学省『高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』平成 30 年

（教科教育研修課　　當　太輝）