


指導資料

数 学 第 160 号

 鹿児島県総合教育センター
令和 4 年 4 月 発行

対象
校種

高等学校
特別支援学校



「数学的な見方・考え方」を広く働かせる解法について —放物線と直線が交点をもつときの考え方—

大学入学共通テストや学習指導要領の改訂により、これまで学んだ知識及び技能を生かし、新たな視点で物事を捉え、思考を進めるような「数学的な見方・考え方」を広く働かせる数学の問題作成のニーズがより一層高まっている。ここでは、そのような問題及び解法の一例を紹介したい。

1 はじめに

「数学的な見方・考え方」について、高等学校学習指導要領(平成 30 年告示)解説数学編理数編では次のように示された。

「数学的な見方・考え方」は、数学的に考える資質・能力を支え、方向付けるものであり、数学の学習が創造的に行われるために欠かせないものである。また、生徒一人一人が目的意識をもって問題を発見したり解決したりする際に積極的に働かせていくものである。

既知の知識及び技能から創造的に考察することで、新たな概念がつけられる。方程式や不等式が図形やグラフの関係性につながっていたり、予想していたことが思いもよらない形で一般化されたりと、「数学的な見方・考え方」を広く働かせることで、数学のよさを認識し、より数学に対する学ぶ意欲が高まる。また、単元横断的、教科横断的な創造性、日常生活や社会の事象についても数学的に捉えようとする態度の育成が期待される。

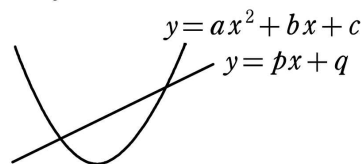
さらに、新たな概念に触れることで、既知の知識や未知の事象においても、「数学的な見方・考え方」を広く働かせて考察しようとする態度が涵養されるものと考えられる。

2 放物線と直線が交点をもつときの考え方

「数学的な見方・考え方」を広く働かせ、思考力、判断力、表現力等を育成する解法を紹介する。今回は数学 I に関する問題の解法である。高校 1 年生が主に履修する科目で、高校数学の基盤となることから、「数学的な見方・考え方」を広く働かせる解法に触れることで、数学を学ぶ楽しさを感じてほしい。

今回は、放物線と直線が交点をもつとき、次の考え方をを用いた解法を紹介する。

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ と直線 $y = px + q$ の交点の x 座標が α 、 β であるとき、次の式が成り立つ。



$$ax^2 + bx + c - (px + q) = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

展開・因数分解を活用した単元横断的な考え方であり、生徒にとってはこれまでの既習内容がつながり、思考力、判断力、表現力等が育成される解法である。具体的な問題で解法を見ていく。一般的な解法を(解)とし、上記の考え方をを用いた解法を(別解)とする。

【問題 1】

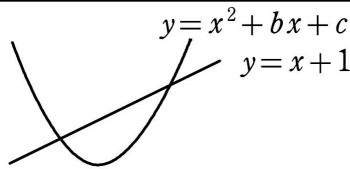
放物線 $y = x^2 + bx + c$ と直線 $y = x + 1$ の交点の x 座標が $-1, 3$ のとき、 b, c の値をそれぞれ求めよ。

(解)

直線 $y = x + 1$ から
 $x = -1$ のとき $y = 0$
 $x = 3$ のとき $y = 4$
よって、交点の座標は $(-1, 0), (3, 4)$
放物線 $y = x^2 + bx + c$ はこの2点を通るので
$$\begin{cases} 0 = 1 - b + c \\ 4 = 9 + 3b + c \end{cases}$$
これより
 $b = -1, c = -2$

式の計算だけでも解けるが、グラフをイメージすると次のように考えられる。

(別解)


 $x^2 + bx + c - (x + 1) = (x + 1)(x - 3) \dots (*)$
とおける。 x についての恒等式より
$$\begin{cases} b - 1 = -2 \\ c - 1 = -3 \end{cases}$$
これを解いて
 $b = -1, c = -2$

グラフをイメージし、その関係性から立式する数学的な見方・考え方を働かせた解法であり、計算もより簡略化される。ただし、この解法は数学Ⅱで履修する恒等式を用いた解法である。これを(別解2)の方法で解くと数学Ⅰの範囲内で解くことができるため、高校1年生の段階で扱うことが可能となる。

(別解 2)

$y = x^2 + bx + c$ であることから(*)を
 $y - (x + 1) = (x + 1)(x - 3)$ とおける。
これより
 $y = x^2 - x - 2$
よって
 $b = -1, c = -2$

これ以降については、(別解2)を参考にした解法を紹介する。【問題1】では放物線と直線が異なる2点で交わる場合について示したが、【問題2】のように接する場合についても同様に考えることができる。

【問題 2】

放物線 $y = x^2 - 4x + 5$ 上の点 P の x 座標が 3 であるとき、点 P における接線の方程式を求めよ。

(解)

$y' = 2x - 4$ であるから接線の傾きは 2
よって、 $P(3, 2)$ における接線の方程式は
 $y - 2 = 2(x - 3)$
したがって
 $y = 2x - 4$

数学Ⅱの微分法を用いたこの解法が一般的である。この問題を「放物線と直線が接する」ことから考えると、次のような解法を導くことができる。

(別解)

点 P における接線の方程式は
 $x^2 - 4x + 5 - y = (x - 3)^2$
よって
 $y = 2x - 4$

数学Ⅰの履修の段階で接線を求めることができる。この解法を利用すると、以下のことが成り立つ。

【放物線と y 軸との交点における接線】

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ について、 y 軸との交点における接線の方程式は $y = bx + c$ である。

(証明)

放物線と接線は $x = 0$ で接するので、接線の方程式は

$$ax^2 + bx + c - y = a(x - 0)^2$$

とおける。

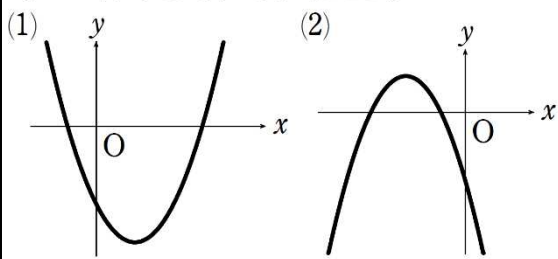
よって、 y 軸との交点における接線の方程式は

$$y = bx + c$$

これにより、【問題3】を(別解)のように解くことができる。

【問題3】

下の図は、2次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフである。(1), (2) の場合について、 a , b , c の符号をそれぞれ答えよ。



(解)

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

よって、軸の方程式は $x = -\frac{b}{2a}$

(1) 下に凸のグラフより $a > 0$

y 切片は負より $c < 0$

軸について $-\frac{b}{2a} > 0$

$a > 0$ より $b < 0$

(2) 上に凸のグラフより $a < 0$

y 切片は負より $c < 0$

軸について $-\frac{b}{2a} < 0$

$a < 0$ より $b < 0$

(別解)

$x = 0$ における接線の方程式は $y = bx + c$

(1) 下に凸のグラフより $a > 0$

y 切片は負より $c < 0$

$x = 0$ における接線の傾きは負より

$b < 0$

(2) 上に凸のグラフより $a < 0$

y 切片は負より $c < 0$

$x = 0$ における接線の傾きは負より

$b < 0$

放物線の凹凸、接線の傾き、 y 切片により、符号を判別することができる。

また、 a , b , c の符号から、グラフの大まかなイメージをもつ発展問題へとつなげることができ、生徒の思考力、判断力、表現力等を高める問題として活用できる。

次に、3点を通る放物線の方程式について考える。

【問題4】

3点 $(0, 6)$, $(-2, 0)$, $(3, 0)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

(解)

求める放物線の方程式を $y = ax^2 + bx + c$ とおく。

3点 $(0, 6)$, $(-2, 0)$, $(3, 0)$ を通るから

$$\begin{cases} 6 = c \\ 0 = 4a - 2b + c \\ 0 = 9a + 3b + c \end{cases}$$

これより

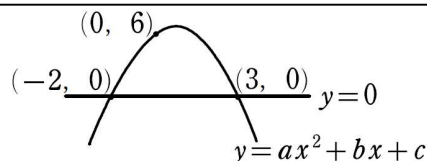
$$a = -1, b = 1, c = 6$$

よって、求める放物線の方程式は

$$y = -x^2 + x + 6$$

3元1次方程式を利用した問題であるが、2点を通る直線を求めることで、(別解)のように求めることができる。

(別解)



2点 $(-2, 0)$, $(3, 0)$ を通る直線の方程式は $y = 0 \dots \textcircled{1}$

放物線と $\textcircled{1}$ の交点の x 座標は -2 , 3 であるから放物線の方程式は

$$y - 0 = a(x + 2)(x - 3) \dots \textcircled{2}$$

とおける。 $\textcircled{2}$ は点 $(0, 6)$ を通るので

$$6 = -6a$$

$$a = -1$$

よって、放物線の方程式は

$$y = -(x + 2)(x - 3)$$

この(別解)についてはよく紹介されており、教科書等にも記載されているが、放物線と直線が交点をもつときの考え方からこの解法が成り立っていることを理解できている生徒は少ないと感じる。

【問題5】、【問題6】は【問題4】の応用であり、【問題4】の(別解)が理解できているなら、次頁の(別解)を思い付くことができる。今回は(別解)のみ紹介する。

【問題5】

3点(0, 5), (-1, 4), (4, 4)を通る放物線の方程式を求めよ。

(別解)

2点(-1, 4), (4, 4)を通る直線の方程式は $y=4 \dots ①$
 放物線と①の交点の x 座標は -1, 4 であるから放物線の方程式は $y-4=a(x+1)(x-4) \dots ②$
 とおける。②は点(0, 5)を通るので $1=-4a$
 $a=-\frac{1}{4}$
 よって放物線の方程式は $y-4=-\frac{1}{4}(x+1)(x-4)$
 $y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x+5$

【問題6】

3点(-3, 2), (1, 10), (0, 5)を通る放物線の方程式を求めよ。

(別解)

2点(-1, 4), (4, 4)を通る直線の方程式は $y=4 \dots ①$
 放物線と①の交点の x 座標は -1, 4 であるから放物線の方程式は $y-4=a(x+1)(x-4) \dots ②$
 とおける。②は点(0, 5)を通るので $1=-4a$
 $a=-\frac{1}{4}$
 よって、放物線の方程式は $y-4=-\frac{1}{4}(x+1)(x-4)$

【問題5】、【問題6】についても【問題4】

と同様に3元1次方程式を活用した解法が一般的である。今回の解法を活用することで、

一つの解法が多くの問題の解法につながるということが実感できる。

他にも「数学的な見方・考え方」を広く働かせる解法の紹介のため、数Iの絶対値の不等式や数Aの平面図形の単元からも次のような問題を作成した。

問題のみの掲載になるが、解法については、当センターWebサイトの「かごしま学びの地図」で閲覧できる。

xy 平面上の図形

- (1) 3点(0, 6), (-2, 0), (3, 0)を通る円の中心の座標を求めよ。
- (2) 円Cはy軸と点P(0, 4)で接しており、x軸と異なる2つの共有点A(a, 0), B(b, 0)をもつ。 $a < b$ となるような自然数 a, b の組を全て求めよ。

絶対値の不等式

- (1) $|x-3| \geq 2$ を解け。
- (2) $2 \leq |x-3| < 5$ を解け。
- (3) $|x-3| + |x+2| \leq 9$ を解け。
- (4) $y = |x| + |x+1| + |x-3|$ の最小値を求めよ。

「かごしま学びの地図」

<http://streaming.edu-s.pref.kagoshima.jp/>



3 おわりに

これまで身に付けた資質・能力を活用して、様々な領域に「数学的な見方・考え方」を広く働かせることで、資質・能力が更に伸びたり、新たな資質・能力が育まれたりして、数学的な見方・考え方が一層豊かになる。

今回のような問題を通して、「数学的な見方・考え方」を広く働かせ、多くの問題や解法に触れることで、数学を学ぶ楽しさを実感してほしい。

-参考文献-

文部科学省『高等学校学習指導要領(平成30年告示) 解説 数学編 理数編』

(教科教育研修課 当 太輝)