[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習4]

次の (1) ～ (3) の角を弧度法で表せ。また，(4)，(5) の角を度数法で表せ。

(1) $210°$　　(2) $240°$　　(3) $330°$　　(4) $\frac{5}{4}\pi$　　(5) $\frac{3}{2}\pi$

$1°$ は $\frac{\pi}{180}$ (ラジアン) であるから，$x°$ は $x\times\frac{\pi}{180}$ (ラジアン) である。

(1) $210\times\frac{\pi}{180}=\frac{7}{6}\pi$

(2) $240\times\frac{\pi}{180}=\frac{4}{3}\pi$

(3) $330\times\frac{\pi}{180}=\frac{11}{6}\pi$

1 (ラジアン) は $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ であるから，a (ラジアン) は $\left(a\times\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ である。

(4) $\frac{5}{4}\pi\times\frac{180}{\pi}=225$　　よって　$225°$

(5) $\frac{3}{2}\pi\times\frac{180}{\pi}=270$　　よって　$270°$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習5]

次のような扇形の弧の長さ l と面積 S を求めよ。

(1) 半径 4，中心角 $\frac{\pi}{3}$　　(2) 半径 6，中心角 $\frac{7}{6}\pi$

(1) $l=4\times\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$，　$S=\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{8}{3}\pi$

(2) $l=6\times\frac{7}{6}\pi=7\pi$，　$S=\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{7}{6}\pi=21\pi$

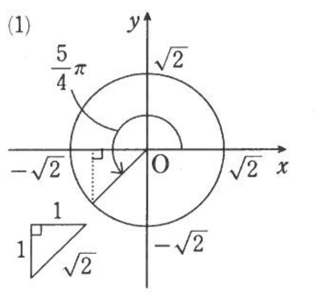
[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習6]

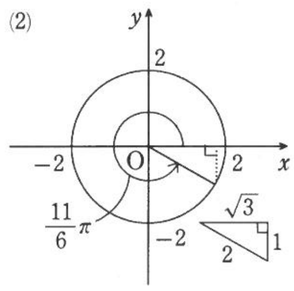
次の θ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ。

(1) $\theta=\frac{5}{4}\pi$　　(2) $\theta=\frac{11}{6}\pi$　　(3) $\theta=-\frac{\pi}{3}$

(1) $\sin\frac{5}{4}\pi=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos\frac{5}{4}\pi=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan\frac{5}{4}\pi=\frac{-1}{-1}=1$

(2) $\sin\frac{11}{6}\pi=\frac{-1}{2}=-\frac{1}{2}$，$\cos\frac{11}{6}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\frac{11}{6}\pi=\frac{-1}{\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

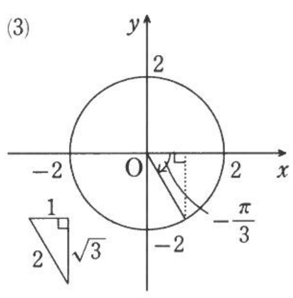




(3) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$

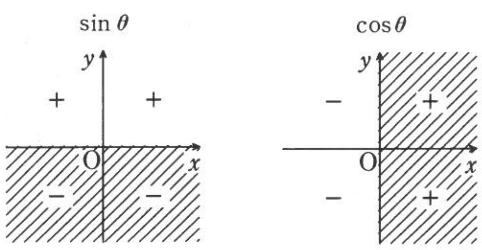


[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習7]

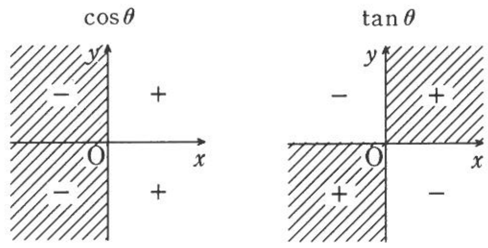
次の条件を満たすような θ の動径は，第何象限にあるか。

(1) $\sin\theta<0$　かつ　$\cos\theta>0$　　(2) $\cos\theta<0$　かつ　$\tan\theta>0$

(1) 第 4 象限



(2) 第 3 象限



[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習8]

θ の動径が第 4 象限にあり，$\sin\theta=-\frac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を，それぞれ求めよ。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

θ の動径が第 4 象限にあるとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

また　$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\left(-\frac{1}{3}\right)\div\frac{2\sqrt{2}}{3}=\left(-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習9]

θ の動径が第 3 象限にあり，$\tan\theta=3$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を，それぞれ求めよ。

$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+3^2}=\frac{1}{10}$$

θ の動径が第 3 象限にあるとき，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{1}{10}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$

また　$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=3\times\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習10]

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=2$$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=2$

したがって　$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習11]

$\sin\theta+\cos\theta=a$ のとき，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の値を a を用いて表せ。

$\sin\theta+\cos\theta=a$ の両辺を 2 乗すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=a^2$$

すなわち　$1+2\sin\theta\cos\theta=a^2$

よって　$\sin\theta\cos\theta=\frac{a^2-1}{2}$

したがって
$$\begin{aligned}\sin^3\theta+\cos^3\theta&=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\\&=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)\\&=a\left(1-\frac{a^2-1}{2}\right)\\&=\frac{3a-a^3}{2}\end{aligned}$$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習12]

次の等式を証明せよ。

(1) $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=2$

(2) $\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$

(1) 左辺$=(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)+(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2\times1=2$

よって　$(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=2$

(2) 左辺$=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta=\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta=$右辺

よって　$\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$

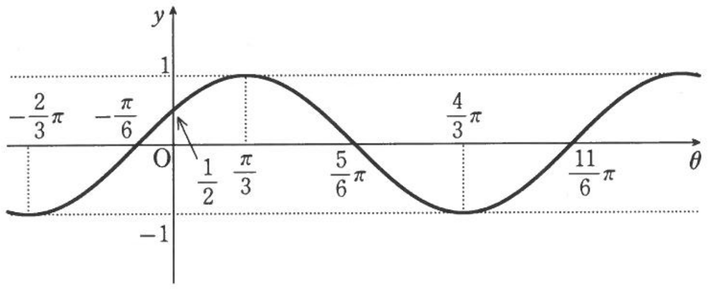
[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習13]

次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

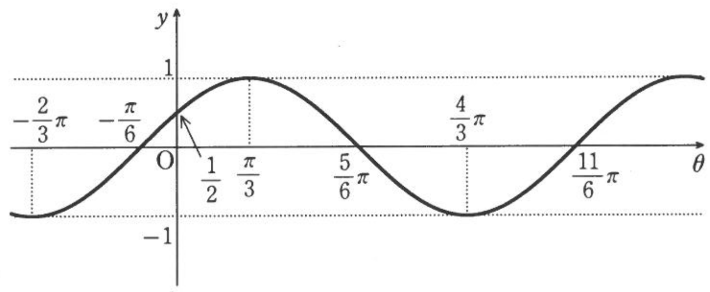
(1)　$y=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$　　(2)　$y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$

(3)　$y=\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

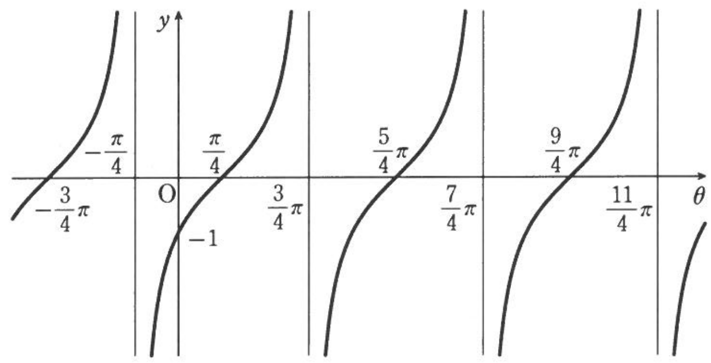
(1)　$y=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものである。グラフは[図]，周期は 2π である。



(2)　$y=\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ平行移動したものである。グラフは[図]，周期は 2π である。



(3)　$y=\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフは，$y=\tan\theta$ のグラフを，θ 軸方向に $\dfrac{\pi}{4}$ だけ平行移動したものである。グラフは[図]，周期は π である。

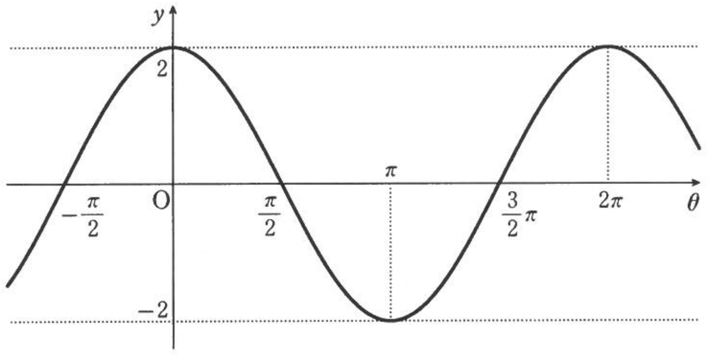


[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習14]

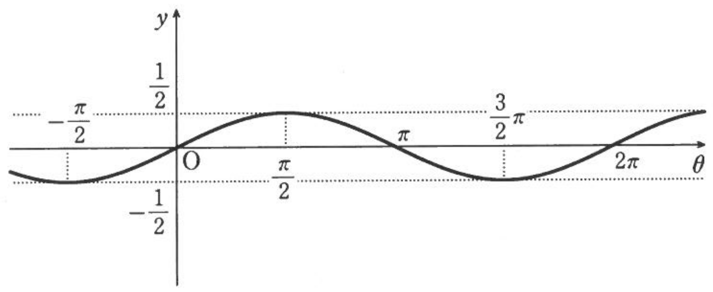
次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1)　$y=2\cos\theta$　　(2)　$y=\dfrac{1}{2}\sin\theta$

(1)　$y=2\cos\theta$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向へ 2 倍に拡大したものである。グラフは[図]，周期は 2π である。



(2)　$y=\dfrac{1}{2}\sin\theta$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，θ 軸をもとにして y 軸方向へ $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。グラフは[図]，周期は 2π である。

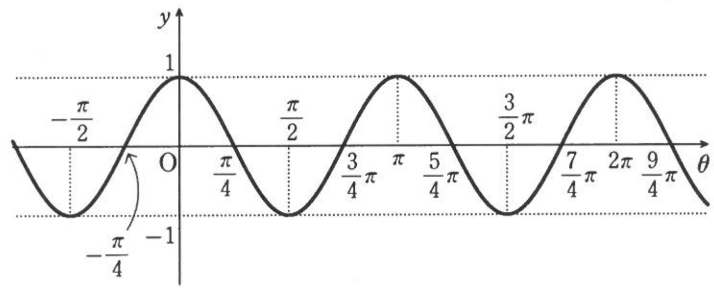


[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習15]

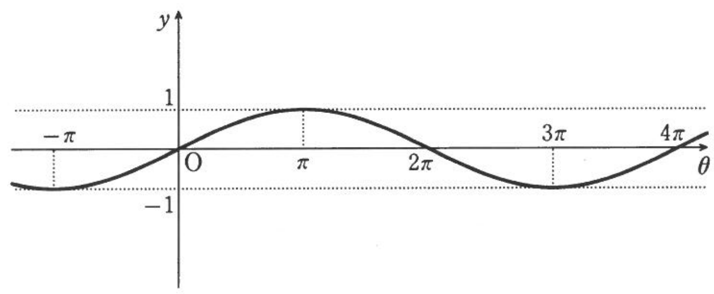
次の関数のグラフをかけ。また，その周期を求めよ。

(1)　$y=\cos 2\theta$　　(2)　$y=\sin\dfrac{\theta}{2}$　　(3)　$y=\tan 2\theta$

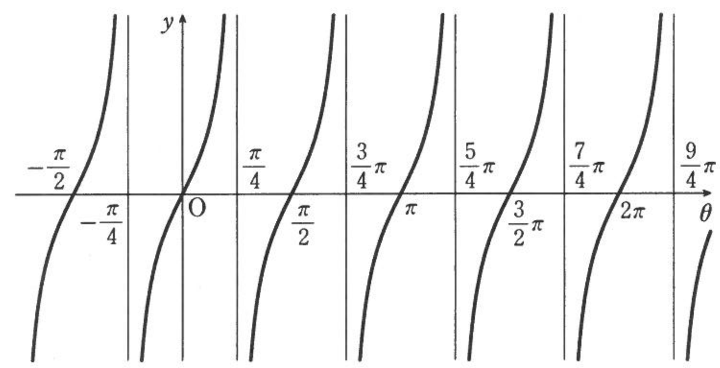
(1)　$y=\cos 2\theta$ のグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。グラフは[図]，周期は $2\pi\times\dfrac{1}{2}=\pi$ である。



(2)　$y=\sin\dfrac{\theta}{2}$ のグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向へ 2 倍に拡大したものである。グラフは[図]，周期は $2\pi\times 2=4\pi$ である。



(3)　$y=\tan 2\theta$ のグラフは，$y=\tan\theta$ のグラフを，y 軸をもとにして θ 軸方向へ $\dfrac{1}{2}$ 倍に縮小したものである。グラフは[図]，周期は $\pi\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ である。



[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習16]

次の値を求めよ。

(1)　$\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$　　(2)　$\cos\left(-\dfrac{13}{6}\pi\right)$　　(3)　$\tan\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)$

(1)　$\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sin\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{1}{2}$

(2)　$\cos\left(-\dfrac{13}{6}\pi\right)=\cos\dfrac{13}{6}\pi=\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+2\pi\right)=\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　$\tan\left(-\dfrac{9}{4}\pi\right)=-\tan\dfrac{9}{4}\pi=-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+2\pi\right)=-\tan\dfrac{\pi}{4}=-1$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習17]

0≦θ<2π のとき，次の方程式を解け。
(1)　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$2\cos\theta+1=0$　　(3)　$\sin\theta+1=0$

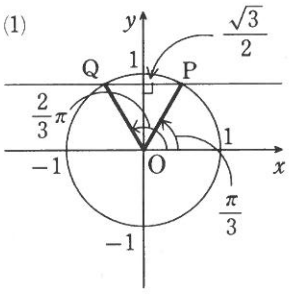
(1)　下の図のように，直線 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

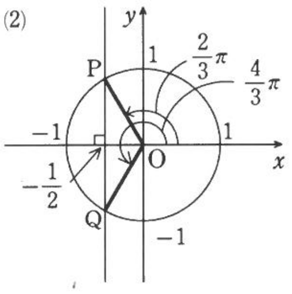
$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$

(2)　方程式を変形すると　　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$

下の図のように，直線 $x=-\dfrac{1}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

(1)


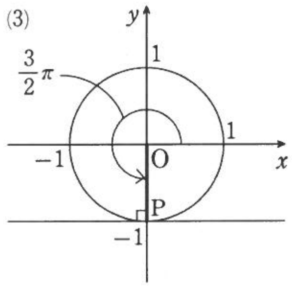
(2)


(3)　方程式を変形すると　　$\sin\theta=-1$

右の図のように，直線 $y=-1$ と単位円の共有点を P とすると，求める θ は，動径 OP の表す角である。

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$

(3)


[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習18]

次の方程式を解け。
(1)　$2\sin\theta=-\sqrt{3}$　　(2)　$\sqrt{2}\cos\theta=-1$

(1)　方程式を変形すると　　$\sin\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

下の図のように，直線 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，求める θ は　　$\theta=\dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，求める方程式の解は

$$\theta=\frac{4}{3}\pi+2n\pi,\ \frac{5}{3}\pi+2n\pi\quad(n\text{ は整数})$$

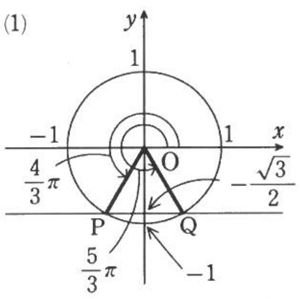
(2)　方程式を変形すると　　$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

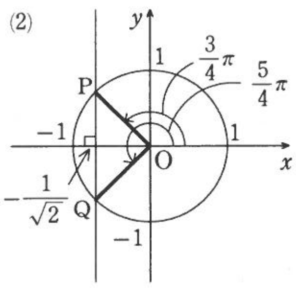
下の図のように，直線 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，求める θ は　　$\theta=\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi$

よって，求める方程式の解は

$$\theta=\frac{3}{4}\pi+2n\pi,\ \frac{5}{4}\pi+2n\pi\quad(n\text{ は整数})$$

(1)


(2)


[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習19]

0≦θ<2π のとき，次の方程式を解け。また，θ の範囲に制限がないときの解を求めよ。
(1)　$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(2)　$\tan\theta=-\sqrt{3}$

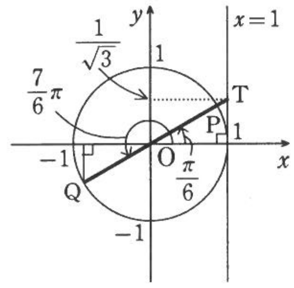
(1)　右の図のように，点 $\mathrm{T}\left(1,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ をとり，直線 OT と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$

また，θ の範囲に制限がないとき，方程式の解は

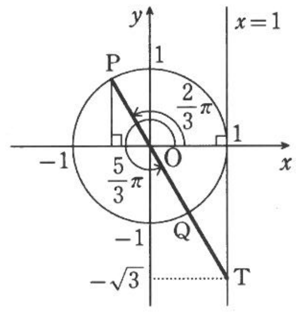
$\theta=\dfrac{\pi}{6}+n\pi$　(n は整数)



(2)　右の図のように，点 $\mathrm{T}(1,\ -\sqrt{3})$ をとり，直線 OT と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから　　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

また，θ の範囲に制限がないとき，方程式の解は　　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi+n\pi$　(n は整数)



[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習20]

0≦θ<2π のとき，次の方程式を解け。
(1)　$2\cos^2\theta+5\sin\theta-4=0$　　(2)　$2\sin^2\theta+\cos\theta-1=0$

(1)　方程式を変形すると

$2(1-\sin^2\theta)+5\sin\theta-4=0$

$2\sin^2\theta-5\sin\theta+2=0$

したがって　　$(2\sin\theta-1)(\sin\theta-2)=0$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから

$2\sin\theta-1=0$　すなわち　$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で解くと　　$\theta=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

(2)　方程式を変形すると

$2(1-\cos^2\theta)+\cos\theta-1=0$

$2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$

したがって　　$(2\cos\theta+1)(\cos\theta-1)=0$

よって　　$2\cos\theta+1=0$　または　$\cos\theta-1=0$

すなわち　　$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$　または　$\cos\theta=1$

$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ を解くと　　$\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

$\cos\theta=1$ を解くと　　$\theta=0$

したがって，求める解は　　$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習21]

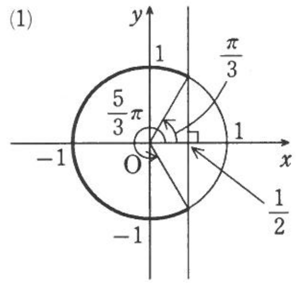
0≦θ<2π のとき，次の不等式を解け。
(1)　$\cos\theta\leqq\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\sin\theta>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

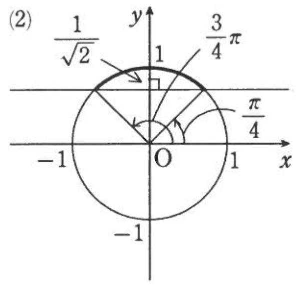
(1)　$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ となる θ は　　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，不等式の解は，下の図から　　$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ は　　$\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$

よって，不等式の解は，下の図から　　$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{3}{4}\pi$

(1)


(2)


[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習23]

加法定理を用いて，$\cos 75^\circ$ の値を求めよ。

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$$
$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習24]

$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ であることを用いて，$\cos\frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習25]

加法定理を用いて，$\tan 105^\circ$ の値を求めよ。

$$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$$
$$= \frac{1^2 + 2\times 1\times\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{1^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} \quad = -2-\sqrt{3}$$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習26]

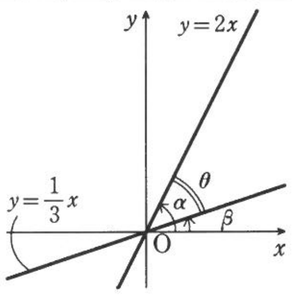
$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ であることを用いて，$\tan\frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

$$\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1\times\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$
$$= \frac{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\times 1 + 1^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} \quad = 2-\sqrt{3}$$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習27]

2 直線 $y=2x$，$y=\frac{1}{3}x$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。

x 軸の正の部分から 2 直線 $y=2x$，$y=\frac{1}{3}x$ まで測った角を，それぞれ α，β とすると，右の図より $\theta = \alpha - \beta$ である。



$$\tan\alpha = 2,\ \tan\beta = \frac{1}{3}$$

であるから

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$= \frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}} = 1$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから　　$\theta = \frac{\pi}{4}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習28]

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin\alpha$　　(2) $\sin 2\alpha$　　(3) $\cos 2\alpha$

(1) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ のとき，$\sin\alpha>0$ であるから

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

(2) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$

(3) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 1 = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習30]

半角の公式を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{\pi}{8}$　　(2) $\sin\frac{3}{8}\pi$　　(3) $\cos\frac{3}{8}\pi$

(1) 半角の公式により

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\sin\frac{\pi}{8}>0$ より　　$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(2) 半角の公式により

$$\sin^2\frac{3}{8}\pi = \frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$\sin\frac{3}{8}\pi>0$ より　　$\sin\frac{3}{8}\pi = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

(3) 半角の公式により

$$\cos^2\frac{3}{8}\pi = \frac{1+\cos\frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\cos\frac{3}{8}\pi>0$ より　　$\cos\frac{3}{8}\pi = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習31]

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\quad \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

上の公式が成り立つことを確かめよ。また，次の値を求めよ。

(1) $\tan\alpha = 3$ のとき，$\tan 2\alpha$ の値

(2) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ で，$\cos\alpha = \frac{2}{3}$ のとき，$\tan\frac{\alpha}{2}$ の値

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

(1) $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\times 3}{1-3^2} = -\frac{3}{4}$

(2) $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より　　$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$

よって　　$\tan\frac{\alpha}{2}>0$

したがって　　$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習32]

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\cos 2\theta + \sin\theta = 1$　　(2) $\sin 2\theta + \cos\theta = 0$

(1) 方程式を変形すると　$(1-2\sin^2\theta)+\sin\theta = 1$

整理すると　　$2\sin^2\theta - \sin\theta = 0$

したがって　　$\sin\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

よって　　$\sin\theta = 0$　または　$\sin\theta = \frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき

$\sin\theta = 0$ から　　$\theta = 0,\ \pi$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ から　　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

したがって　　$\theta = 0,\ \pi,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

(2) 方程式を変形すると　$2\sin\theta\cos\theta + \cos\theta = 0$

したがって　　$\cos\theta(2\sin\theta + 1) = 0$

よって　　$\cos\theta = 0$　または　$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき

$\cos\theta = 0$ から　　$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ から　　$\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

したがって　　$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習17]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $2\cos\theta + 1 = 0$　　(3) $\sin\theta + 1 = 0$

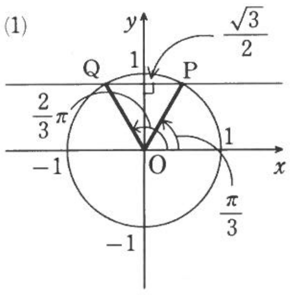
(1) 下の図のように，直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

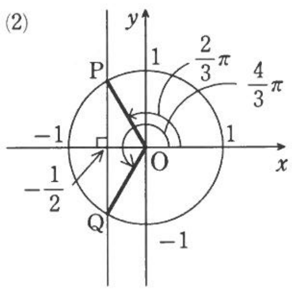
$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　　$\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$

(2) 方程式を変形すると　　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

下の図のように，直線 $x = -\dfrac{1}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　　$\theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$



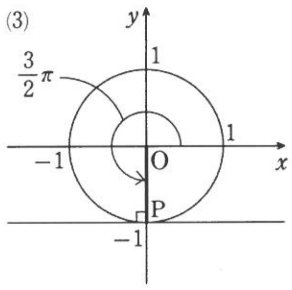


(3) 方程式を変形すると　　$\sin\theta = -1$

右の図のように，直線 $y = -1$ と単位円の共有点を P とすると，求める θ は，動径 OP の表す角である。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$\theta = \dfrac{3}{2}\pi$



[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習18]

次の方程式を解け。

(1) $2\sin\theta = -\sqrt{3}$　　(2) $\sqrt{2}\cos\theta = -1$

(1) 方程式を変形すると　　$\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

下の図のように，直線 $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，求める θ は　　$\theta = \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，求める方程式の解は

$\theta = \dfrac{4}{3}\pi + 2n\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi + 2n\pi$　(n は整数)

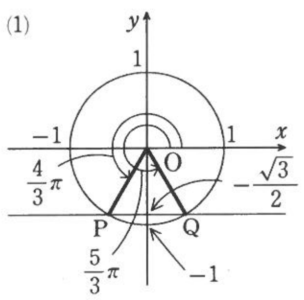
(2) 方程式を変形すると　　$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

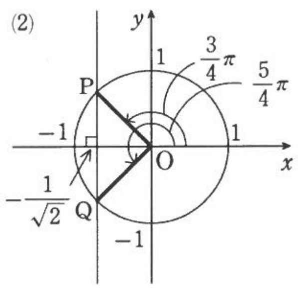
下の図のように，直線 $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，求める θ は　　$\theta = \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi$

よって，求める方程式の解は

$\theta = \dfrac{3}{4}\pi + 2n\pi,\ \dfrac{5}{4}\pi + 2n\pi$　(n は整数)





[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習19]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。また，θ の範囲に制限がないときの解を求めよ。

(1) $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　(2) $\tan\theta = -\sqrt{3}$

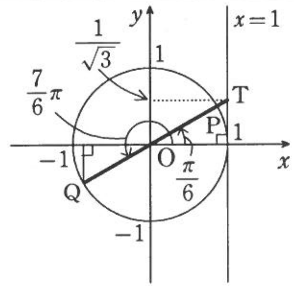
(1) 右の図のように，点 $\mathrm{T}\left(1,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ をとり，直線 OT と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$

また，θ の範囲に制限がないとき，方程式の解は

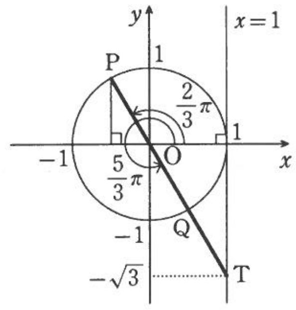
$\theta = \dfrac{\pi}{6} + n\pi$　(n は整数)



(2) 右の図のように，点 $\mathrm{T}(1,\ -\sqrt{3})$ をとり，直線 OT と単位円の交点を P，Q とすると，求める θ は，動径 OP，OQ の表す角である。

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　　$\theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

また，θ の範囲に制限がないとき，方程式の解は　　$\theta = \dfrac{2}{3}\pi + n\pi$　(n は整数)



[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習20]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $2\cos^2\theta + 5\sin\theta - 4 = 0$　　(2) $2\sin^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$

(1) 方程式を変形すると

$2(1 - \sin^2\theta) + 5\sin\theta - 4 = 0$

$2\sin^2\theta - 5\sin\theta + 2 = 0$

したがって　　$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta - 2) = 0$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$ であるから

$2\sin\theta - 1 = 0$　すなわち　$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で解くと　　$\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

(2) 方程式を変形すると

$2(1 - \cos^2\theta) + \cos\theta - 1 = 0$

$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$

したがって　　$(2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) = 0$

よって　　$2\cos\theta + 1 = 0$　または　$\cos\theta - 1 = 0$

すなわち　　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$　または　$\cos\theta = 1$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ を解くと　　$\theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

$\cos\theta = 1$ を解くと　　$\theta = 0$

したがって，求める解は　　$\theta = 0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習21]

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の不等式を解け。

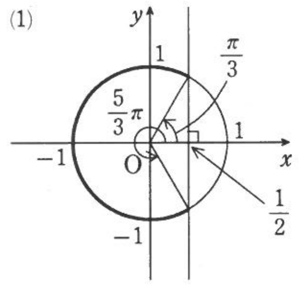
(1) $\cos\theta \leqq \dfrac{1}{2}$　　(2) $\sin\theta > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

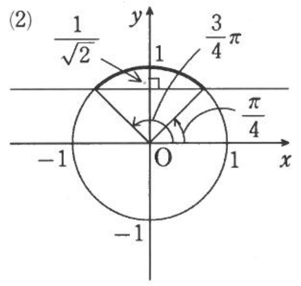
(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ となる θ は　　$\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって，不等式の解は，下の図から　　$\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{3}\pi$

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で，$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる θ は　　$\theta = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$

よって，不等式の解は，下の図から　　$\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{3}{4}\pi$





[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習23]

加法定理を用いて，$\cos 75^\circ$ の値を求めよ。

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$$
$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習24]

$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ であることを用いて，$\cos\frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習25]

加法定理を用いて，$\tan 105^\circ$ の値を求めよ。

$$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times 1} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}$$
$$= \frac{1^2 + 2\times 1\times\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2}{1^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} \quad = -2-\sqrt{3}$$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習26]

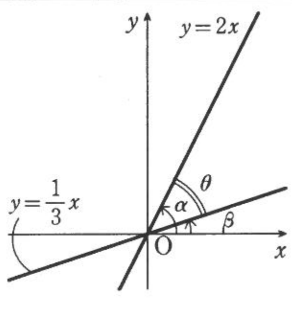
$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ であることを用いて，$\tan\frac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

$$\tan\frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1\times\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$
$$= \frac{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\times 1 + 1^2}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} \quad = 2-\sqrt{3}$$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習27]

2 直線 $y=2x$，$y=\frac{1}{3}x$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。

x 軸の正の部分から 2 直線 $y=2x$，$y=\frac{1}{3}x$ まで測った角を，それぞれ α，β とすると，右の図より $\theta = \alpha - \beta$ である。



$$\tan\alpha = 2, \quad \tan\beta = \frac{1}{3}$$

であるから

$$\tan\theta = \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$= \frac{2-\frac{1}{3}}{1+2\cdot\frac{1}{3}} = 1$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから　　$\theta = \frac{\pi}{4}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習28]

$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ で，$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ のとき，次の値を求めよ。

(1) $\sin\alpha$　　(2) $\sin 2\alpha$　　(3) $\cos 2\alpha$

(1) $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ のとき，$\sin\alpha>0$ であるから

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

(2) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$

(3) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 - 1 = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習30]

半角の公式を用いて，次の値を求めよ。

(1) $\sin\frac{\pi}{8}$　　(2) $\sin\frac{3}{8}\pi$　　(3) $\cos\frac{3}{8}\pi$

(1) 半角の公式により

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\sin\frac{\pi}{8}>0$ より　　$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

(2) 半角の公式により

$$\sin^2\frac{3}{8}\pi = \frac{1-\cos\frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$\sin\frac{3}{8}\pi>0$ より　　$\sin\frac{3}{8}\pi = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

(3) 半角の公式により

$$\cos^2\frac{3}{8}\pi = \frac{1+\cos\frac{3}{4}\pi}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$\cos\frac{3}{8}\pi>0$ より　　$\cos\frac{3}{8}\pi = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習31]

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}, \quad \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

上の公式が成り立つことを確かめよ。また，次の値を求めよ。

(1) $\tan\alpha = 3$ のとき，$\tan 2\alpha$ の値

(2) $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ で，$\cos\alpha = \frac{2}{3}$ のとき，$\tan\frac{\alpha}{2}$ の値

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{1-\cos\alpha}{2}}{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

(1)　$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\times 3}{1-3^2} = -\frac{3}{4}$

(2)　$\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ より　　$0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$

よって　　$\tan\frac{\alpha}{2}>0$

したがって　　$\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習32]

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

(1) $\cos 2\theta + \sin\theta = 1$　　(2) $\sin 2\theta + \cos\theta = 0$

(1) 方程式を変形すると　$(1-2\sin^2\theta)+\sin\theta = 1$

整理すると　　$2\sin^2\theta - \sin\theta = 0$

したがって　　$\sin\theta(2\sin\theta - 1) = 0$

よって　　$\sin\theta = 0$　または　$\sin\theta = \frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき

$\sin\theta = 0$ から　　$\theta = 0,\ \pi$

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ から　　$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

したがって　　$\theta = 0,\ \pi,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi$

(2) 方程式を変形すると　$2\sin\theta\cos\theta + \cos\theta = 0$

したがって　　$\cos\theta(2\sin\theta+1) = 0$

よって　　$\cos\theta = 0$　または　$\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ のとき

$\cos\theta = 0$ から　　$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$\sin\theta = -\frac{1}{2}$ から　　$\theta = \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

したがって　　$\theta = \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

2年生　理系　No.3

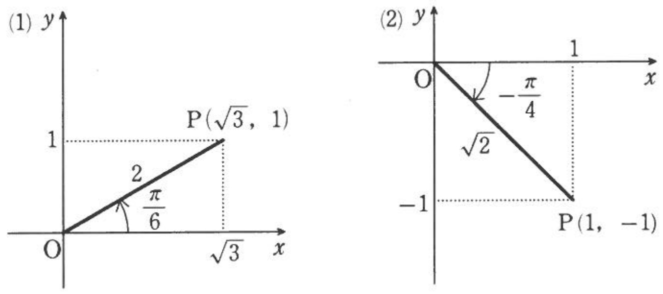
[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習33]

次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

(1) $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$　　(2) $\sin\theta-\cos\theta$

(1) $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

(2) $\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$



[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習34]

次の関数の最大値，最小値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

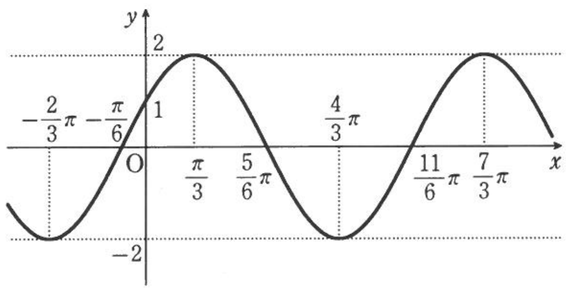
$y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ であるから　　$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leqq 1$ であるから　　$-2\leqq y\leqq 2$

したがって　　y の最大値は 2，最小値は -2

また，このグラフは，$y=\sin x$ のグラフを，x 軸をもとにして y 軸方向へ 2 倍に拡大し，さらに x 軸方向に $-\frac{\pi}{6}$ だけ平行移動したもので，[図] のようになる。



[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習35]

$0\leqq x<2\pi$ のとき，次の方程式を解け。

$\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$

左辺の三角関数を合成すると　　$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$

よって　　$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$　……①

$0\leqq x<2\pi$ のとき

$\frac{\pi}{3}\leqq x+\frac{\pi}{3}<\frac{7}{3}\pi$

であるから，この範囲で ① を解くと

$x+\frac{\pi}{3}=\frac{5}{6}\pi$　または　$x+\frac{\pi}{3}=\frac{13}{6}\pi$

したがって　　$x=\frac{\pi}{2},\ \frac{11}{6}\pi$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習1]

次の $\square$ に適する数を求めよ。ただし，(1)～(3)，(5) は整数，(4) は小数とする。

(1) $5^0=\square$　　(2) $4^{-2}=\frac{1}{4^{\square}}$　　(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^5=2^{\square}$

(4) $2.31\times10^{-3}=\square$　　(5) $0.00074=7.4\times10^{\square}$

(1) $5^0=\boxed{1}$

(2) $4^{-2}=\frac{1}{4^{\boxed{2}}}$

(3) $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{2^5}=2^{\boxed{-5}}$

(4) $2.31\times10^{-3}=2.31\times0.001=\boxed{0.00231}$

(5) $0.00074=7.4\times0.0001=7.4\times10^{\boxed{-4}}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習2]

次の $\square$ に適する数を求めよ。

(1) $3^4\times3^{-2}=3^{\square}$　　(2) $10^{-3}\div10^2=10^{\square}$

(3) $(3^{-2})^4=3^{\square}$　　(4) $(2\times3^4)^{-2}=2^{\square}\times3^{\square}$

(1) $3^4\times3^{-2}=3^{4+(-2)}=3^{\boxed{2}}$

(2) $10^{-3}\div10^2=10^{-3-2}=10^{\boxed{-5}}$

(3) $(3^{-2})^4=3^{(-2)\times4}=3^{\boxed{-8}}$

(4) $(2\times3^4)^{-2}=2^{-2}\times(3^4)^{-2}=2^{-2}\times3^{4\times(-2)}=2^{\boxed{-2}}\times3^{\boxed{-8}}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習3]

次の $\square$ に適する数を求めよ。

(1) $(-2)^3=-8$ であるから，$\square$ は -8 の $\square$ 乗根である。

(2) $2^4=(-2)^4=16$ であるから，2 と $\square$ は 16 の $\square$ 乗根である。

(1) $(-2)^3=-8$ であるから，$\boxed{-2}$ は -8 の $\boxed{3}$ 乗根である。

(2) $2^4=(-2)^4=16$ であるから，2 と $\boxed{-2}$ は 16 の $\boxed{4}$ 乗根である。

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習4]

次の値を求めよ。

(1) $\sqrt[3]{1}$　　(2) $\sqrt[3]{27}$　　(3) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$

(1) $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{1^3}=1$

(2) $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$

(3) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{1}{2}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習5]

次の式を計算せよ。

(1) $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}$　　(2) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}$　　(3) $(\sqrt[3]{5})^2$　　(4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{12}}$　　(5) $\sqrt[8]{16}$

(1) $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{3\times9}=\sqrt[3]{3\times3^2}=\sqrt[3]{3^3}=3$

(2) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}=\sqrt[4]{\frac{32}{2}}=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$

(3) $(\sqrt[3]{5})^2=\sqrt[3]{5^2}=\sqrt[3]{25}$

(4) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{12}}=\sqrt[4\times3]{12}=\sqrt[12]{12}$

(5) $\sqrt[8]{16}=\sqrt[8]{2^4}=\sqrt[2\times4]{2^{1\times4}}=\sqrt[2]{2}=\sqrt{2}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習6]

次の $\square$ に適する数を求めよ。

(1) $4^{\frac{1}{3}}=\sqrt[\square]{4}$　　(2) $3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[\square]{3^{\square}}$　　(3) $5^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[\square]{5}}$

(4) $\sqrt[5]{6}=\square^{\frac{1}{\square}}$　　(5) $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^{\square}}=2^{\frac{\square}{\square}}$

(1) $4^{\frac{1}{3}}=\sqrt[\boxed{3}]{4}$

(2) $3^{\frac{3}{4}}=\sqrt[\boxed{4}]{3^{\boxed{3}}}$

(3) $5^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{5^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[\boxed{3}]{5}}$

(4) $\sqrt[5]{6}=\boxed{6}^{\frac{1}{\boxed{5}}}$

(5) $\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2^{\boxed{4}}}=2^{\frac{\boxed{4}}{\boxed{3}}}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習7]

次の式を計算せよ。

(1) $2^{\frac{3}{2}}\times2^{\frac{4}{3}}\div2^{\frac{5}{6}}$　　(2) $3^{\frac{1}{2}}\div3^{\frac{5}{6}}\times3^{\frac{1}{3}}$

(3) $\sqrt[4]{5}\times\sqrt[8]{5^3}\div\sqrt{5}$　　(4) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[12]{4}\times\sqrt[4]{4}$

(1) $2^{\frac{3}{2}}\times2^{\frac{4}{3}}\div2^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{6}}=2^2=4$

(2) $3^{\frac{1}{2}}\div3^{\frac{5}{6}}\times3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}}=3^0=1$

(3) $\sqrt[4]{5}\times\sqrt[8]{5^3}\div\sqrt{5}=5^{\frac{1}{4}}\times5^{\frac{3}{8}}\div5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{5}$

(4) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[12]{4}\times\sqrt[4]{4}=4^{\frac{1}{3}}\div4^{\frac{1}{12}}\times4^{\frac{1}{4}}=4^{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}}=4^{\frac{1}{2}}$

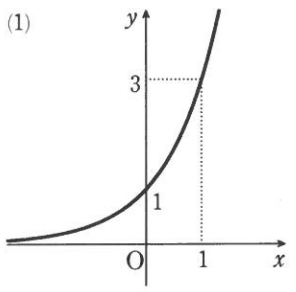
$=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2^1=2$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習9]

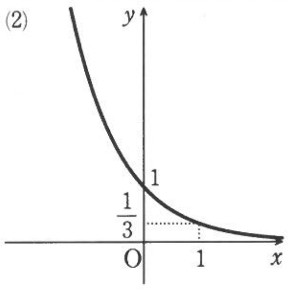
次の関数のグラフをかけ。

(1) $y=3^x$　　(2) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

(1)



(2)



[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習10]

次の3つの数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[5]{8}$　　(2) 1, 0.2^3, 0.2^{-1}

(1) $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=2^{\frac{2}{3}}$,　$\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^3}=2^{\frac{3}{4}}$,　$\sqrt[5]{8}=\sqrt[5]{2^3}=2^{\frac{3}{5}}$

指数の大小を調べると　$\frac{3}{5}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$

底2は1より大きいから

$$2^{\frac{3}{5}}<2^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{3}{4}}$$

すなわち　$\sqrt[5]{8}<\sqrt[3]{4}<\sqrt[4]{8}$

(2) $1=0.2^0$

指数の大小を調べると　$-1<0<3$

底0.2は1より小さいから

$$0.2^3<0.2^0<0.2^{-1}$$

すなわち　$0.2^3<1<0.2^{-1}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習11]

次の方程式を解け。

(1) $4^x=8$　　(2) $8^x=\frac{1}{16}$　　(3) $27^x=3^{2-x}$

(1) 方程式を変形すると　$2^{2x}=2^3$

$2x=3$ から　$x=\frac{3}{2}$

(2) 方程式を変形すると　$2^{3x}=2^{-4}$

$3x=-4$ から　$x=-\frac{4}{3}$

(3) 方程式を変形すると　$3^{3x}=3^{2-x}$

$3x=2-x$ から　$x=\frac{1}{2}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習12]

次の不等式を解け。

(1) $3^x<81$　　(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^x\geqq\frac{1}{32}$　　(3) $2^{3x-4}>\left(\frac{1}{4}\right)^x$

(1) 不等式を変形すると　$3^x<3^4$

底3は1より大きいから　$x<4$

(2) 不等式を変形すると　$\left(\frac{1}{2}\right)^x\geqq\left(\frac{1}{2}\right)^5$

底 $\frac{1}{2}$ は1より小さいから　$x\leqq5$

(3) 不等式を変形すると　$2^{3x-4}>2^{-2x}$

底2は1より大きいから　$3x-4>-2x$

これを解いて　$x>\frac{4}{5}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習13]

次の $\square$ に適する数を求めよ。

(1) $\log_2 16=\square$　　(2) $\log_2 4=\square$　　(3) $\log_2\frac{1}{8}=\square$

(1) $16=2^4$ から　$\log_2 16=\boxed{4}$

(2) $4=2^2$ から　$\log_2 4=\boxed{2}$

(3) $\frac{1}{8}=2^{-3}$ から　$\log_2\frac{1}{8}=\boxed{-3}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習14]

次の $\square$ に適する数を求めよ。

(1) $9=3^2$ から　$\log_3 9=\square$　　(2) $\frac{1}{25}=5^{-2}$ から　$\log_5\frac{1}{25}=\square$

(3) $3=4^x$ のとき　$x=\log_{\square}3$　　(4) $\log_4 64=x$ のとき　$x=\square$

(1) $\log_3 9=\boxed{2}$

(2) $\log_5\frac{1}{25}=\boxed{-2}$

(3) $x=\log_{\boxed{4}}3$

(4) $64=4^x$　すなわち　$4^3=4^x$

よって　$x=3$

したがって，$\log_4 64=x$ のとき　$x=\boxed{3}$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習15]

次の値を求めよ。

(1) $\log_2 2^5$　　(2) $\log_5 25$　　(3) $\log_3\frac{1}{27}$　　(4) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}$

(5) $\log_{10}0.1$　　(6) $\log_{\frac{1}{3}}3$　　(7) $\log_2\sqrt[3]{2}$　　(8) $\log_{\sqrt{5}}5$

(1) $\log_2 2^5=5$

(2) $\log_5 25=\log_5 5^2=2$

(3) $\log_3\frac{1}{27}=\log_3 3^{-3}=-3$

(4) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^4=4$

(5) $\log_{10}0.1=\log_{10}\frac{1}{10}=\log_{10}10^{-1}=-1$

(6) $\log_{\frac{1}{3}}3=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=-1$

(7) $\log_2\sqrt[3]{2}=\log_2 2^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$

(8) $\log_{\sqrt{5}}5=\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{5})^2=2$

[329改訂版 新編 数学Ⅱ 練習17]

次の式を計算せよ。

(1) $\log_6 3+\log_6 12$　　(2) $\log_3 2-\log_3 18$

(3) $\log_3 4+\log_3 18-3\log_3 2$　　(4) $\log_5 12-\log_5 3-2\log_5 10$

(1) $\log_6 3+\log_6 12=\log_6(3\times12)=\log_6 36=\log_6 6^2=2$

(2) $\log_3 2-\log_3 18=\log_3\frac{2}{18}=\log_3\frac{1}{9}=\log_3 3^{-2}=-2$

(3) $\log_3 4+\log_3 18-3\log_3 2=\log_3 4+\log_3 18-\log_3 2^3$

$$=\log_3\frac{4\times18}{8}=\log_3 9=\log_3 3^2=2$$

(4) $\log_5 12-\log_5 3-2\log_5 10=\log_5 12-\log_5 3-\log_5 10^2$

$$=\log_5\frac{12}{3\times100}=\log_5\frac{1}{25}=\log_5 5^{-2}=-2$$