数学（数学Ⅰ）学習指導案

学　校　名　鹿児島県立加治木高等学校
授　業　者　勇　　真人
日　　　時　令和３年10月20日（水）２限
指導学級　１年３組40名

１．単元名　　　数学Ⅰ　第４章　図形と計量【課題学習】
　　使用教材　　改訂版　高等学校　数学Ⅰ（数研出版）

２．教材観
　図形と計量は,測量やGPSなど，意外と身近なところで利用している分野である。また，直接的に数学Ⅱの三角関数だけでなく，入試では数学Ａの平面図形の分野との融合問題も頻出であることから，重要な単元である。今回の授業の内容は,三角関数の加法定理の先取りであるが,既習の内容で導くことができるものであり,事前に紹介することで今後の学習への繋がりとしたい。

３．生徒観
　真面目な生徒が多く，静かに授業に取り組んでいる。積極的に発言することは少ないが，指名されたときには,きちんと答えることができる。事前アンケートでは「数学の授業が好き」と答えた生徒が３割程度いたが,「数学が得意」を答えた生徒は１割もおらず，逆に,「苦手」と答えた生徒が３割以上いた。しかし，ほぼ全員が「数学ができるようになりたい」と回答していることから，前向きな気持ちが感じられる。また,「数学を勉強することで，どのような力が身につくと思いますか。」に対しての回答で「思考力」が最も多く，授業でも生徒がいろいろ考え，それを還元する機会も工夫して作る必要があると考えている。

４．単元の目標（評価基準）

知識・技能	思考・判断・表現	主体的に学習に取り組む態度
・有名角とその倍数の三角比を理解している。 ・正弦定理を用いて,正弦の値を求めることができる。	・正弦定理や余弦定理を用いて,有名角以外の角の三角比を求めることができる。 ・辺の長さを計算しやすい数で設定することができる。 ・面積の公式からでも求めることができる。	・今まで学習してきた定理で,15°，75°，105°の正弦の値を求めることに取り組む意欲がある。

５．本時の目標（本時　22/22）
・$\sin 105^\circ$，$\sin 15^\circ$の値を求めることができる。　【知識・技能】
・正弦の加法定理（α，βは鋭角）を導くことができる。　【思考・判断・表現】
【主体的に学習に取り組む態度】

６．本時の実際

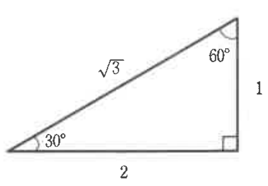
過　程	時　間	学習活動および指導過程	指導上の留意点および評価の観点
	３分	小テスト（三角比の値）	・有名角の三角比を正しく理解できているか。【知】
導入	１０分	・三角定規の組合せで 15°，75°，105° を作ってみる。 ・$\sin 75°$ の値の求め方を確認する。 正弦を含む公式を確認する。 正弦定理，面積の公式など	・既習事項の確認。 三角比の表を用いて，三角比の値を正しく求められるか。【知】 正弦定理・面積の公式を正しく理解できているか。【知】
展開Ⅰ	１５分	・$\sin 105°$，$\sin 15°$ の値を求める。 クラス全体で求めやすい辺の長さを決める。 →各自で求める。 →近くの人たちと共有する。 →答え合わせ。（タブレットで撮影し，投影する。）	・三角比は，直角三角形の大きさに関係なく一定になることから，どこの長さを１とすることで，計算が容易になるのか考えさせる。【思】 ・三角形の大きさが変化しても，三角比の値は変化しないことを理解しているか。【知】 ・計算しやすい辺の長さにできたか。【思】
展開Ⅱ	２０分	グループ活動 ・$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$を導く。 ・$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$を導く。 共通の辺ＡＤの長さを１にして，他の辺の長さをα，βを用いて表す。	・６人程度のグループをつくり，考えさせる。【主】 ・有名角の三角比が利用できないので三角比の定義を用いて，三角形の辺の長さを表すことができるか。【知】【思】 ・今回の授業で扱う証明は直角三角形を用いているので，α，βが鋭角に限ることを伝える。
まとめ	２分	・面積の公式でも求めることができる。 ・余弦定理を用いることで，余弦の加法定理$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$を導くことができることを示す。 ・α，βが鋭角以外のときの求め方は数学Ⅱの三角関数の単元で学ぶことを伝える。	・解答例をプロジェクターで示す。生徒の解答の中で出てきたときはそれを紹介する。

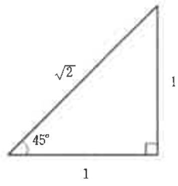
７．本時の評価

・$\sin 105°$，$\sin 15°$ の値を求めることができる。　【知識・技能】
・正弦の加法定理（α，βは鋭角）を導くことができる。　【思考・判断・表現】
【主体的に学習に取り組む姿勢】

小テストの答え合わせ

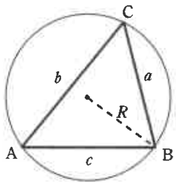
θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	×	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0





正弦定理

$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



三角形の面積

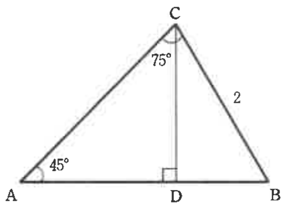
$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

【復習】　P.158　章末問題A　4

△ABCにおいて，　BC＝2，∠BAC=45°，∠ACB=75°　である。辺ABの長さを求め，sin75° の値を求めよ。



解答　∠ABC=180°−（45°+75°）=60°

であるから，△BCDの直角三角形により

BD=1，CD= $\sqrt{3}$

また，△ADCの直角三角形より

AD= $\sqrt{3}$，（AD= $\sqrt{6}$）

であるから，AB= $\sqrt{3}+1$ である。

したがって，△ABCに正弦定理を用いて，

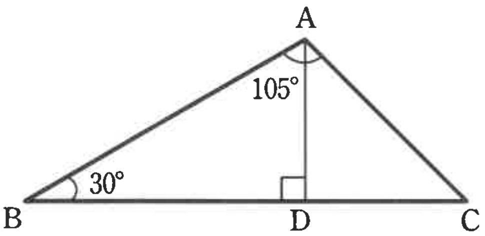
$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sin 75^\circ}=\frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$2\sin 75^\circ=(\sqrt{3}+1)\frac{\sqrt{2}}{2}$$

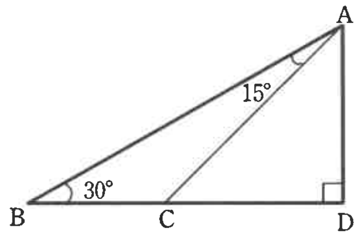
$$\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

【演習１】

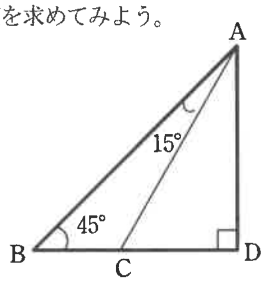
(1)　sin105° の値を求めてみよう。



(2)　sin15° の値を求めてみよう。



(2)　sin15° の値を求めてみよう。



【演習２】

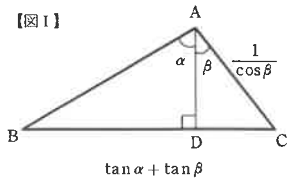
右の図Ⅰにおいて，AD＝1とすると

$$AC=\frac{1}{\cos\beta}$$

$$BC=\tan\alpha+\tan\beta$$

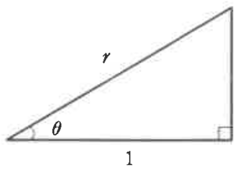
である。

【図Ⅰ】

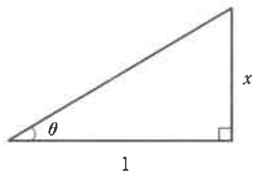


これらを用いて，次の等式が成り立つことを示してみよう。

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$　（α，β は鋭角）



$\cos\theta = \dfrac{1}{r}$ より $r = \dfrac{1}{\cos\theta}$



$\tan\theta = \dfrac{x}{1}$ より　$x = \tan\theta$

証明

$$\frac{BC}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{AC}{\sin\angle ABD}$$

$$AC\sin(\alpha+\beta) = BC\sin\angle ABD$$

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= BC\sin(90^\circ-\alpha)\times\frac{1}{AC}\\
&= (\tan\alpha+\tan\beta)\times\cos\alpha\times\cos\beta\\
&= \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)\times\cos\alpha\cos\beta\\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}\times\cos\alpha\cos\beta\\
&= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

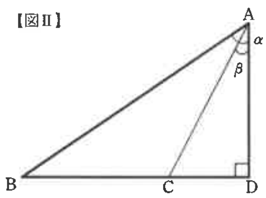
さらに，次の等式が成り立つことを示してみよう。

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$　（α，β は鋭角）

証明　図IIにおいて，AD=1 とすると，先の証明と同様に

$AC = \dfrac{1}{\cos\beta}$，$BC = \tan\alpha - \tan\beta$

【図II】



さらに，次の等式が成り立つことを示してみよう。

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$　（α，β は鋭角）

証明　図IIにおいて，AD=1 とすると，先の証明と同様に

$AC = \dfrac{1}{\cos\beta}$，$BC = \tan\alpha - \tan\beta$

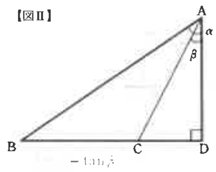
よって，△ABC に正弦定理を用いて

$$\frac{BC}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{AC}{\sin\angle ABC}$$

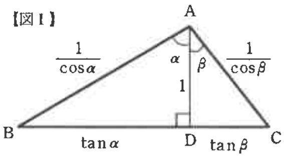
$$AC\sin(\alpha-\beta) = BC\sin\angle ABC$$

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha-\beta) &= (\tan\alpha-\tan\beta)\times\sin(90^\circ-\alpha)\times\frac{1}{AC}\\
&= \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)\times\cos\alpha\times\cos\beta\\
&= \frac{\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}\times\cos\alpha\cos\beta\\
&= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

【図II】



【図I】



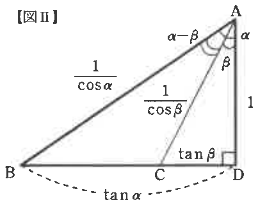
証明　$AB = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ だから，面積について

△ABC=△ABD+△ADC

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\beta}\cdot\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\cdot\tan\alpha\cdot1+\frac{1}{2}\cdot\tan\beta\cdot1$$

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= (\tan\alpha+\tan\beta)\cos\alpha\cos\beta\\
&= \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)\cos\alpha\cos\beta\\
&= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

【図II】



証明　$AB = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ だから，面積について

△ABC=△ABD−△ADC

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\beta}\cdot\sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}\cdot\tan\alpha\cdot1-\frac{1}{2}\cdot\tan\beta\cdot1$$

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= (\tan\alpha-\tan\beta)\cos\alpha\cos\beta\\
&= \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)\cos\alpha\cos\beta\\
&= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

下の図Iにおいて，AD=1 とすると

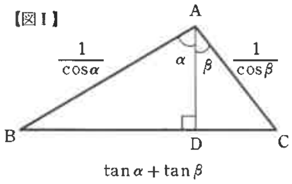
$AC = \dfrac{1}{\cos\beta}$，$AB = \dfrac{1}{\cos\beta}$

$BC = \tan\alpha + \tan\beta$

である。これらを用いて，次の等式が成り立つことを示す。

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$　（α，β は鋭角）

【図I】



証明　△ABC に余弦定理を用いて

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\cos\beta}\right)^2-(\tan\alpha+\tan\beta)^2}{2\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\beta}}$$

ここで，$\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)^2+\left(\dfrac{1}{\cos\beta}\right)^2-(\tan\alpha+\tan\beta)^2$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}-(\tan^2\alpha+2\tan\alpha\tan\beta+\tan^2\beta)\\
&= (1+\tan^2\alpha)+(1+\tan^2\beta)-(\tan^2\alpha+2\tan\alpha\tan\beta+\tan^2\beta)\\
&= 2-2\tan\alpha\tan\beta
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \frac{2-2\tan\alpha\tan\beta}{2\cdot\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\cos\beta}} = \frac{1-\tan\alpha\tan\beta}{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta}}\\
&= (1-\tan\alpha\tan\beta)\cos\alpha\cos\beta\\
&= \left(1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)\cos\alpha\cos\beta\\
&= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

終

【図I】