数学Ⅱ（P.33～P.34）

【本時の目標】

「解の配置（応用例題８や問 23）」の問題を解くための条件や考え方を理解する。

「解の配置」とは･･･ ２次方程式がもつ**解に範囲**がつくことで，判別式だけでは考えられない問題。 （例）応用例題８では，異なる２つの**正の**解をもつ条件を考える。異なる２つの解をもつ条件は判別式を調べれば求められる。 しかし，２つの**正の**解をもつ条件は，判別式以外の別の条件が必要である。 実は，すでに数学Ⅰの２次関数で，「判別式・軸・端点」の３点セットを用いた解法で扱っている。

【本時の流れ】

1	教科書 33 ページを熟読しながら，重要な部分をノートに写してください。四角で囲んでいる部分は重要です。 また，23 行目から 25 行目については，22 行目の$\boxed{３}$が成り立つ理由を示されています。
2	ノートに教科書 34 ページの応用例題８の問題と模範解答を，条件や考え方を確認しながら，じっくりと時間をかけて丁寧に書き写しましょう。
3	応用例題８の解答・解説が書かれたプリントを熟読してください。
4	ノートに教科書 34 ページの問 23 の問題を書いて，自分の力で解きましょう。解けるか解けないかで，本時の目標が達成できたかどうかが確認できます。
5	問 23 の解答解説が書かれたプリントを熟読してください。解けなかった場合は，１から５までを，もう一度繰り返しましょう。

応用 例題 **8** 　2次方程式の解の符号

2次方程式 $x^2-kx-k+3=0$ が異なる2つの正の解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

解 2つの正の解を α, β とし，判別式を D とする。

$$D=(-k)^2-4(-k+3)$$
$$=k^2+4k-12$$
$$=(k+6)(k-2)$$

異なる2つの実数解をもつから，$D>0$ より

$$k<-6,\quad 2<k \quad \cdots\cdots ①$$

解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=k,\quad \alpha\beta=-k+3$$

であり，α, β がともに正であるから

$$\alpha+\beta>0,\quad \alpha\beta>0$$

が成り立つ。

ゆえに

$$k>0,\quad -k+3>0$$

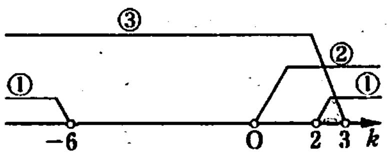
よって　$k>0 \quad \cdots\cdots ②$

$k<3 \quad \cdots\cdots ③$

①，②，③より k の値の範囲は

$$2<k<3$$

である。



〈解説〉

2つの正の解をもつ

→ (i) 異なる2つの実数解をもつ
　 (ii) 2つの正の解をもつ

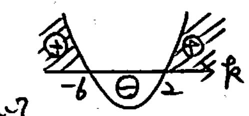
(i)より $D>0$ となればよいから

$D=(-k)^2-4(-k+3)$

$=(k+6)(k-2)$

$(k+6)(k-2)>0$ を解いて

$k<-6,\ 2<k$ …①



(ii)について 2つの正の解をもつから「$\alpha>0$ かつ $\beta>0$」であり これは、「$\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$」と同値である。

$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ については、方程式の2解の和と積であるから、解と係数の関係を用いればよい。

$\alpha+\beta=-\dfrac{-k}{1}=k,\ \alpha\beta=\dfrac{-k+3}{1}=-k+3$

よって $k>0$ かつ $-k+3>0$

$k>0$ …② かつ $-k>-3$

$k<3$ …③

①,②,③より

$\underline{2<k<3}$ …Ans.

〈公式・定理など〉

2次方程式の解の判別

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D(=b^2-4ac)$ と解について

① 異なる2つの実数解をもつ $\iff D>0$

② 重解をもつ $\iff D=0$

③ 異なる2つの虚数解をもつ $\iff D<0$

同値変形（意味が同じ）

「$\alpha>0$ かつ $\beta>0$」$\iff$「$\alpha+\beta>0$ かつ $\alpha\beta>0$」

「$\alpha<0$ かつ $\beta<0$」$\iff$「$\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$」

2次方程式の解と係数の関係

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α,β とすると

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

（補充）

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を α,β,γ とすると

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

問23　2次方程式 $x^2+2(k+1)x-2k+6=0$ が，次の条件を満たすような定数 k の値の範囲を求めよ。

(1)　異なる2つの負の解をもつ

(2)　正の解と負の解をもつ

(1)(解) 2つの負の解を α, β とし，判別式を D とする。

$D=\{2(k+1)\}^2-4\cdot1\cdot(-2k+6)$

$=4(k^2+2k+1+2k-6)$

$=4(k^2+4k-5)$

$=4(k+5)(k-1)$

異なる2つの実数解をもつから $D>0$ より

$k<-5,\ 1<k$ …①

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=-\dfrac{2(k+1)}{1}=-2k-2$

$\alpha\beta=\dfrac{-2k+6}{1}=-2k+6$

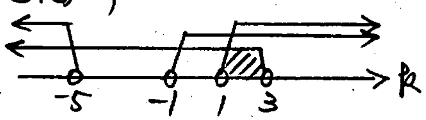
であり，α, β がともに負であるから

$\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$

$-2k-2<0$ かつ $-2k+6>0$

$k>-1$ …② かつ $k<3$ …③

①，②，③より



よって

$\underline{\underline{1<k<3}}$ … Ans

(2)(解) 正の解と負の解をもつのは，

$\alpha\beta<0$ のときであるから

$-2k+6<0$

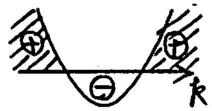
$\underline{\underline{k>3}}$ … Ans.

〈解説〉

(1) 2つの負の解をもつ

→ (i) 異なる2つの実数解をもつ
　 (ii) 2つの負の解をもつ

(i)より $D>0$ となればよいから



$D=4(k+5)(k-1)$

$4(k+5)(k-1)>0$ を解いて

$k<-5,\ 1<k$ …①

(ii)について，2つの負の解をもつから

「$\alpha<0$ かつ $\beta<0$」であり，これは，

「$\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$」と同値である。

$\alpha+\beta$ と $\alpha\beta$ については，方程式の2解の和と積であるから，解と係数の関係を用いればよい

$\alpha+\beta=-\dfrac{2(k+1)}{1}=-2k-2$

$\alpha\beta=\dfrac{-2k+6}{1}=-2k+6$

よって $-2k-2<0$ かつ $-2k+6>0$

$k>-1$ …② かつ $k<3$ …③

①，②，③より

$\underline{\underline{1<k<3}}$ … Ans

(2) 正の解と負の解をもつとき，2つの解の和は，正負の判断ができないが積は，負になることがわかる。

よって $\alpha\beta<0$

〈公式・定理など〉

応用問題8のプリントで確認すること。

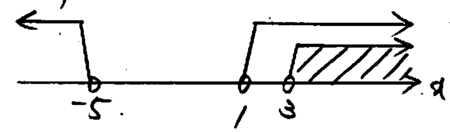
〈補足〉

(2)の問題について <u>$D>0$ は必要ないの？</u>

$D>0 \iff k<-5,\ 1<k$ …①

$\alpha\beta<0 \iff k>3$ …④

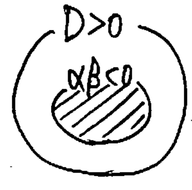
①，④より



$k>3$ となる。

実は，$\alpha\beta<0$ がいえれば，同時に $D>0$ になるのです。

ベン図で表すと，右図のように必ずなります。



だから <u>$D>0$ は必要ない</u>

・応用問題8や問23のような問題を「解の配置」といいます。この問題はすでに数学Ⅰで扱っています。

<u>判別式・軸・端点の3点セット</u>

思い出しましたか？別解として解いてみると，いい復習になります。