鹿児島県総合教育センター

平成24年度長期研修研究報告書

研究主題

「学び直し」に着目した指導の工夫
ー 数学Ⅱ「高次方程式」「軌跡と領域」を通して ー

鹿児島県立頴娃高等学校

教　諭　中島　康二

目　次

Ⅰ　研究主題設定の理由

中学校学習指導要領において，数学科では，生徒の学習を確実なものにするために「学び直しの機会の設定」が明記されている。平成25年度から高等学校において全面実施される新学習指導要領の総則には「義務教育段階での学習内容の確実な定着を図るための学習機会を設けること」と示されている。具体的には，関連する小・中学校の内容を適宜取り入れ，復習した上で学習を進めたり，新たに学習した視点で小・中学校の内容を見直したりすることである。

本校では，小・中学校での学習内容が十分に定着しておらず，数学に対して苦手意識をもった生徒が多い。その要因として，系統性が明確で連続性のある算数・数学の学びの中で，複数のつまずきを克服できず，「分からない」状態が積み重なり，「どこでつまずいているのか」さえ把握できなくなっていることが考えられる。また，これまでの自分自身の授業を振り返ると，生徒の進路実現のために基礎・基本を身に付けさせたいという思いがあるにもかかわらず，進度を気にするあまりに一方的な説明が多くなったり，本時に学習する新しい内容の指導に重点を置きすぎたりするなど，つまずきに対する手立てが不十分であった。

そこで，生徒の進路実現に必要な学力を身に付けさせるにあたり，土台となる小・中・高等学校における基礎・基本の確実な定着を図る。そのためには，既習内容の定着や新しい内容の理解を目指す「学び直し」に着目した指導により，つまずきを把握・克服させることが重要であると考えた。

本研究では，まず，算数・数学の学習におけるつまずきや「学び直し」に関する理論を研究し，その関連性を探っていく。次に，小・中・高等学校における既習内容の定着度を把握すると同時に，生徒のつまずきを分析・考察する。それらを踏まえて，「学び直し」に着目した指導の在り方を探っていく。具体的には，新しい内容に関連する既習内容の定着を図るための教材作成とその活用，つまずきを生かした指導，既習内容を振り返らせる発問を行う。このような取組によって，生徒はつまずきの把握・克服ができ，基礎・基本の確実な定着が図られるのではないかと考え，本研究主題を設定した。

Ⅱ　研究の構想

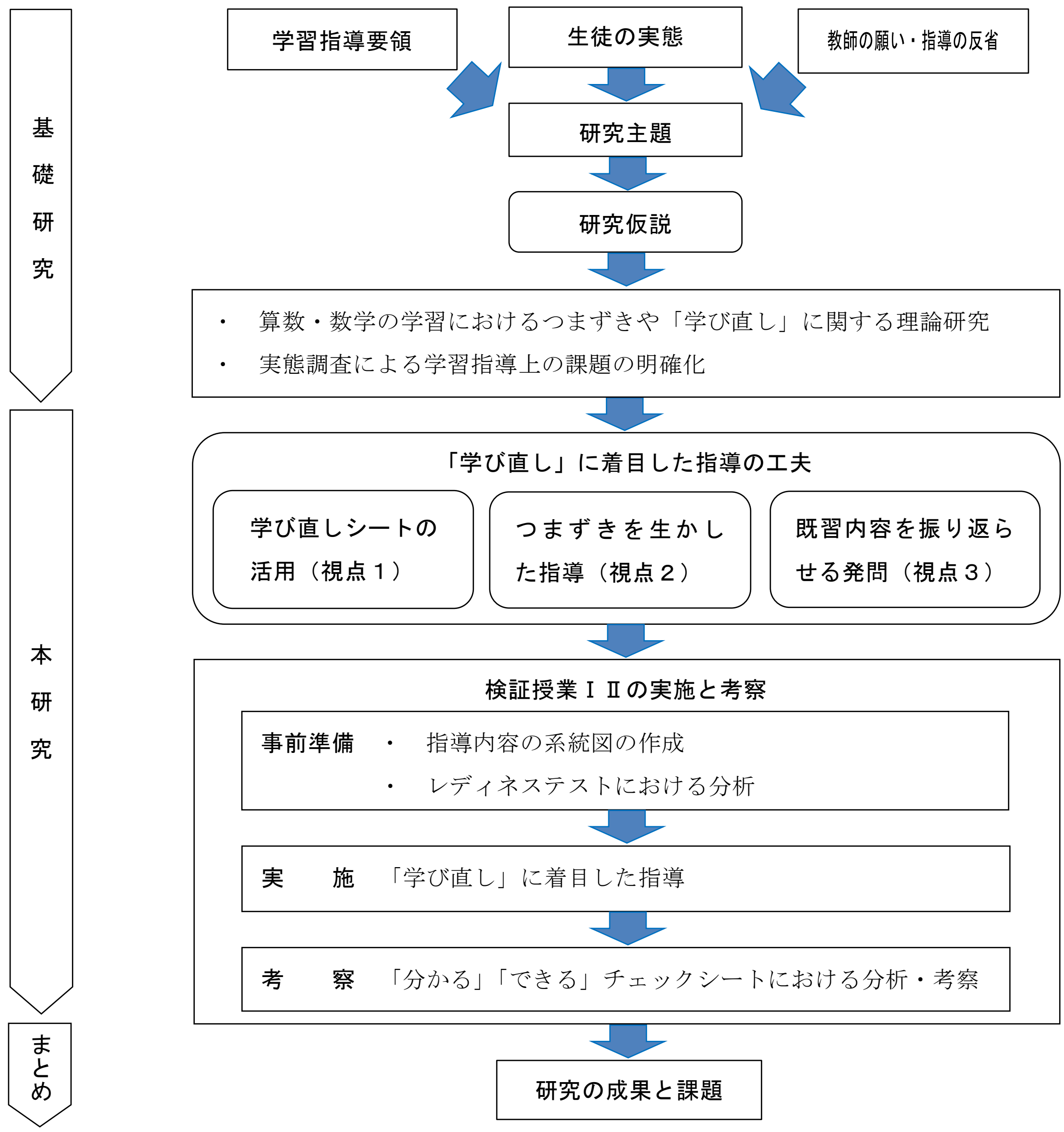
1　研究のねらい

(1)　算数・数学の学習におけるつまずきや「学び直し」に関する理論研究を行う。
(2)　実態調査を実施し，その分析から学習指導上の課題を明らかにする。
(3)　小・中・高等学校の指導内容の系統性を踏まえたレディネステストを行い，既習内容の定着度を把握し，生徒のつまずきを分析・考察する。
(4)　新しい内容に関連する既習内容の定着を図る教材の活用やつまずきを生かした指導，既習内容を振り返らせる発問を行い，「学び直し」に着目した指導の在り方を明らかにする。
(5)　検証授業を通して，仮説の検証を行い，研究の成果と課題を明らかにする。

2　研究の仮説

数学の授業において，新しい内容に関連する既習内容の定着を図る教材の活用やつまずきを生かした指導，既習内容を振り返らせる発問を行えば，「学び直し」に着目した指導が充実され，生徒はつまずきを把握・克服できるのではないか。

3　研究の計画



Ⅲ　研究の実際

1　研究主題に関する基本的な考え方

(1)　算数・数学の学習におけるつまずきについて

算数・数学において，新しい内容を学習する際には，これまで学習してきたことを関連付けて考えることが大切である。そのため，既習内容の定着が不十分であれば，新しい内容を学習する際の妨げとなり，このこと自体が生徒にとってつまずきとなる。また，既習内容が定着していても，活用ができなければ，その生徒はつまずいている状態であると言える。

片桐*1)（1982）によると，つまずきの原因を五つに分類している（**表１**）。この五つのつまずきを，**表１**の１～４を「既習内容の定着が不十分なために起こるつまずき」，５を「既習内容は定着しているが，それを活用できないために起こるつまずき」と大きく二つに分けて考える。

表１　つまずきの原因

1	不注意による誤り
2	理解や技能が不十分なための誤り
3	内容を誤って理解しているため，正しく適用できない
4	理解していないための誤り
5	既習内容を理解しているが，これを用いることに自信がないことによる誤り

＊1）片桐重男 編著 『つまずきを生かす指導』 1982 年 明治図書

(2)　「学び直し」について

「学び直し」といえば，既習内容の定着が不十分な場合に補充指導を行い，基礎・基本の定着を図ることが一般的である。しかし，新しい内容を学習する際に，既習内容を意図的に取り上げることで生徒の理解を広げたり，深めたりすることもできる。これらのことから「学び直し」は，つまずきの有無に関わらず，すべての生徒にとって重要であると考える。

これまで，数学教育において「確かな学力の育成」や「個に応じた指導」といった指針の下，基礎・基本の確実な定着が重視されてきた。また，平成20年１月の中央教育審議会答申では，算数・数学科の「改善の基本方針」の一つとして，「反復（スパイラル）」が重視され，教育課程編成のキーワードの一つとなり，今日における「学び直し」が強調され始めた。数学の学習において，「学び直し」の意義や重要性は，従来から指摘されてきており，決して新しいものではない。授業する際には，必要に応じて既習内容を振り返り，新しい内容との関連を確認している。ここで改めて，生徒の状況を踏まえ，どのような「学び直し」が必要であるか追究する。

山口*2)（2008）によると，次の二つの意味での「学び直し」に着目した指導が重要であると述べている。

○　「補充的な学び直し」は，既習内容の確実な定着やより深い理解を目的とする。

○　「発展的な学び直し」は，新しい内容の理解を目的とする。

どちらも学び直す内容は既習内容であるが，両者の違いは学び直すための目的にある。

ここで，「補充的な学び直し」と「発展的な学び直し」について整理を行う。

ア　「補充的な学び直し」について

基礎・基本の確実な定着を図るためには，つまずきの克服という観点からみると，単に類似した問題を数多く解けばよいというものではない。学習内容の意味を理解することが大切である。「なぜそうなるのだろうか」とその意味を考えていなければ，表現などで少し問題を変えられると解けなくなってしまう。例えば，数学Ⅰや中学校第３学年で学習する「二次方程式」において（**図１**），問１はドリルとして定着を図る計算問題，問２は「掛けて０になる場合は少なくともどちらか一方が０である」という意味を理解させる問題で，生徒の実態に応じて扱う必要がある。

問１　次の二次方程式を解け。

(1)　$(x-2)(x+3)=0$

(2)　$x^2-2x-3=0$

問２　$(x-2)(x+3)=0$ が，$x=2$ を解にもつ理由を説明せよ。

図１　「二次方程式」における問題

イ　「発展的な学び直し」について

新しい内容を理解するためには，次の三つの側面に注目し導が重要である。

(ア)　新しい内容の学習の前提となるレディネスの確認と形成に着目した学び直し

既習内容が定着していれば，それを基に新しい内容の問題解決を図ることができる。例えば，数学Ⅱ「整式の除法」で，小学校第４学年で学習する「整数の除法」（**図２**）を，また，数学Ⅱ「分数式の計算」で，小学校第６学年で学習する「分数の計算」（**図３**）を取り扱うことが挙げられる。

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x+1\,\overline{)\,x^2+4x+5} \\ x^2+\ \ x \quad \\ \hline 3x+5 \\ 3x+3 \\ \hline 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} 13 \\ 11\,\overline{)\,145} \\ 11\ \, \\ \hline 35 \\ 33 \\ \hline 2 \end{array}$$

図２　「整数の除法」から「整式の除法」

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}&=\frac{1\times(x+1)}{x\times(x+1)}-\frac{1\times x}{(x+1)\times x}\\&=\frac{x+1}{x(x+1)}-\frac{x}{x(x+1)}\\&=\frac{1}{x(x+1)}\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}\frac{1}{2}-\frac{1}{3}&=\frac{1\times3}{2\times3}-\frac{1\times2}{3\times2}\\&=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

図３　「分数の計算」から「分数式の計算」

＊2) 山口武志 『数学教育』 2008年10月号 明治図書，　『算数・数学 RooT』 2011年４月 日本文教出版

(ｲ)　学年間や異校種間の内容のスパイラルな接続を意識した学び直し

学年間や異校種間における指導内容のつながりを意識し，既習内容を振り返ることによって，理解を確かなものとし，更なる定着を図り，学びを発展させていくことができる。

例えば，「二直線の平行」について，

- 一つの直線に等しい角度で交わっている二本の直線　＜小学校第５学年＞
- 同じ平面上にあって交わらない二直線　＜中学校第１学年＞
- 傾きが等しい二直線（二直線の一致も平行に含む）＜数学Ⅱ「図形と方程式」＞
- 平面でも空間でも同じ式で表現　＜数学Ｂ「ベクトル」＞

以上のように，学年が進むにつれて見方が深まり，広く解釈され，最終的には「ベクトルの平行条件」へとつながる（**図４**）。

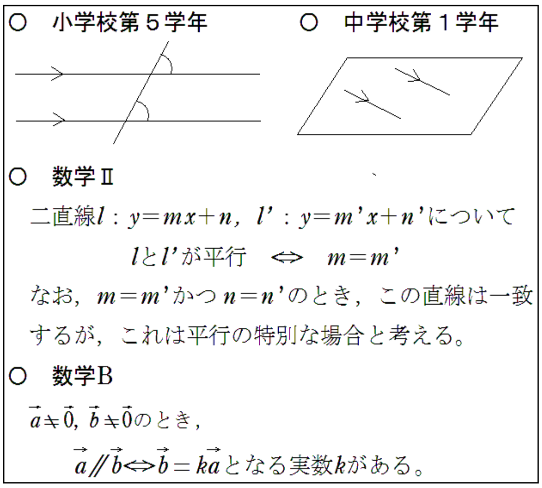


図４　「二直線の平行」から「ベクトルの平行条件」

(ｳ)　異なる領域の内容の相互関係を意識した学び直し

問題解決において，多面的に捉え，既習内容を関連させて考えることで，新しい内容を理解することができる。例えば，数学Ⅱ「不等式の表す領域」では，「図形」「関数」「数と式」の三つの領域を関連させ，問題解決を図る。二元一次不等式を満たす x，y の組み合わせを考え，座標平面上に点を図示し，点と直線の位置関係を読み取り，直線で分けられた領域を表すなど，それぞれを関連させて考えることが大切である（**図５**）。

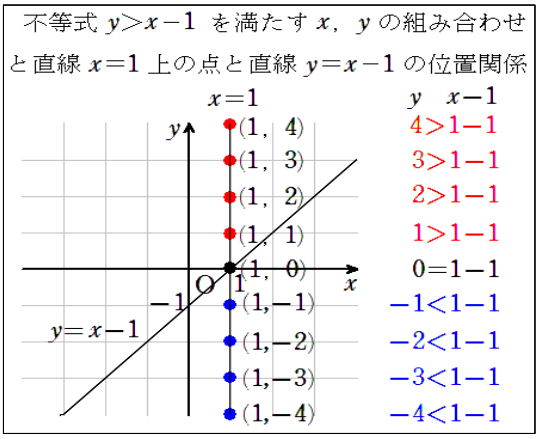


図５　「不等式の表す領域」

(3)　目指す生徒の姿

生徒のつまずき状況と，「学び直し」の目的から，目指す生徒の姿を次のように捉える。

ア　つまずきを把握し，既習内容が定着している生徒
イ　既習内容と新しい内容を関連させて，問題解決の見通しがもてる生徒

つまずきを積み重ね，既習内容の定着が不十分な生徒に対して，「補充的な学び直し」を行い，つまずきを把握させ，既習内容の確実な定着を目指す。また，既習内容は定着しているが，それを活用できない生徒や自力での問題解決が困難な生徒に対して，「発展的な学び直し」を行い，既習内容と新しい内容を関連させて，問題解決の見通しがもてる生徒を目指す。さらに，つまずきのない生徒に対して，新たにつまずくことがないように「発展的な学び直し」を行う（**図６**）。授業中の生徒の理解度によって「補充的な学び直し」又は「発展的な学び直し」が必要とされ，必ずしも一方の「学び直し」だけが必要とされるという訳ではない。

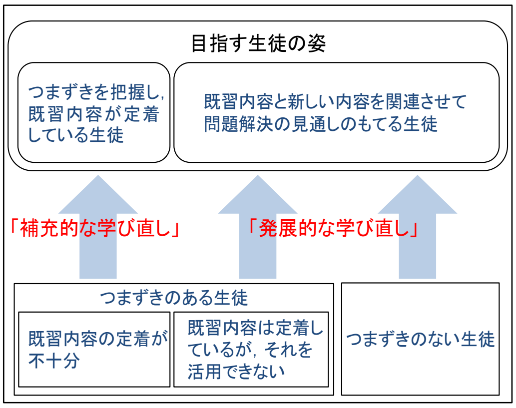


図６　目指す生徒の姿とつまずき，「学び直し」との関係

2　数学の学習に関する実態調査

(1)　概要

ア　対象生徒　鹿児島県立頴娃高等学校　機械科　第２学年（27 人）

イ　調査方法　質問紙法（一部記述式）

ウ　実施期日　平成24年６月12日（火）

エ　調査内容　算数・数学に対する苦手意識，苦手な問題，粘り強さ，必要性，既習内容からみえる生徒の実態

オ　評価方法　調査の各項目について，「よくあてはまる」「ややあてはまる」を肯定的な回答，「あまりあてはまらない」「全くあてはまらない」を否定的な回答とする。

(2)　分析

ア　苦手意識をもった時期と理由

図７から，93%（25人）の生徒が算数・数学に対して苦手意識をもっていることが分かる。苦手意識をもち始めた時期は，学習内容が抽象的になってくる中学校段階から極端に多くなっている。**表２**は，苦手意識をもった理由に対して，上位の回答を示している。理由は様々であるが，ほとんどの生徒が「既習内容の定着が不十分なため」又は「新しい内容が分らないため」に起こるつまずきを積み重ねてきていることが考えられる。

図７「苦手意識をもった時期はいつですか」

表２　苦手意識をもった理由

1　学習内容が難しくなった	56%(14 人)
2　説明が分らなくなった	16%(４人)
2　覚えなければならないことが増えた	16%(４人)

イ　算数・数学における苦手な問題

表３は「どのような問題が苦手ですか」という質問に対して，上位の回答を示している。ただ単に計算するだけでなく，様々な既習内容を関連させて考える問題が苦手であることが分かる。「証明」問題は，既習の用語や性質，定理などの理解ができておらず，それらを関連させ，順序立て説明することが難しく，また，「グラフをかく」問題は，座標平面上で x と y の数量関係を表したり，式と図形を関連させて考えたりすることで苦手であると考えられる。

表３「どのような問題が苦手ですか」
（選択肢より複数回答可）

1　証明	81%(22 人)
2　グラフをかく	48%(13 人)
3　式を立てる	37%(10 人)
3　公式を使う	37%(10 人)

ウ　数学の学習に対する粘り強さ

問題を解けないとき，教科書・ノート，先生や友だちを頼って，取り組もうとする割合が89%（24人）であり（**表４赤枠**），多くの生徒が何とか問題を解こうとしている。しかし，その中で30%（８人）の生徒が途中であきらめてしまう傾向にあることが分かる（**表４青枠**）。つまり，この生徒たちは問題を解くとき，やる気をもって何とか取り組もうとするが，つまずきを積み重ね，既習内容の定着が不十分なため，粘り強く学習ができない状況であると考えられる。

表４　意欲と解決方法の相関表①

		数学の問題を解けないとき，あきらめずにいろいろ考えようとしていますか。		
		計	肯定的	否定的
数学の問題を解けないとき、どのような方法で解決しようとしていますか。	計	100%(27人)	59%(16人)	41%(11人)
	教科書・ノートを参考にする	44%(12人)	33%(９人)	11%(３人)
	先生に聞く	15%(４人)	11%(３人)	４%(１人)
	友だちに聞く	30%(８人)	15%(４人)	15%(４人)
	何もしない	11%(３人)	０%(０人)	11%(３人)

エ　数学を学習する必要性

表５において，数学を学習することが嫌いな生徒59%（16人）のそのほとんどが「分からない，できないから」という理由であった。また，「数学を学習することは嫌いだが大切だ」と回答した生徒が41%（11人）おり，これらの生徒は，数学を学ぶ必要性を感じているが，つまずきを積み重ねることで嫌いになっていると考えられる。

表５　相関表②

		数学を学習することは好きですか。		
		計	肯定的	否定的
計		100%(27人)	41%(11人)	59%(16人)
数学を学習することは大切だと思いますか。	肯定的	82%(22人)	41%(11人)	41%(11人)
	否定的	18%(５人)	０%(０人)	18%(５人)
既習内容を解くことができますか。	肯定的	52%(14人)	30%(８人)	22%(６人)
	否定的	48%(13人)	11%(３人)	37%(10人)

オ　既習内容の定着からみえる生徒の実態

表５より，既習内容を解くことができる・できないは約半数に分かれるが，好き・嫌いについては，嫌いの割合の方が大きい。その中で，「既習内容を解くことができず，数学を学習することが嫌いである生徒」37%（10人）を「つまずきを積み重ね，既習内容の定着が不十分な生徒」，また，「既習内容を解くことができるが，数学を学習することが嫌いである生徒」22%（６人）を「数学のよさが分からないまま学習している生徒」と捉えて考える。

⑶　実態調査による学習指導上の課題と対策

つまずきを積み重ねることで苦手意識をもち始め，その多くが中学校段階に集中している。また，様々な既習内容を関連させて考える問題を苦手としている。さらに，問題を解くときに途中であきらめてしまう生徒や数学が嫌いな生徒，数学のよさが分からないまま学習している生徒がいる。

そこで，つまずきの原因を明らかにし，その克服を目指す。そのためにも，生徒の既習内容の定着度を把握し，つまずきに対する手立てを考える必要がある。また，一単位時間の授業における導入段階において，本時の内容と関連のある既習内容を振り返らせ，「分かる，できる」という実感をもたせる指導や数学のよさの一つである「既習内容を活用し，新しい内容を理解する」ことを気付かせる指導が必要であると考える。そのためにも，系統性を明確にした上で，既習内容の定着を図ったり，新しい内容の理解を目指したり，目的に応じた「学び直し」に着目した指導が必要とされる。

３　「学び直し」に着目した指導の工夫

理論研究と実態調査の結果から，「補充的な学び直し」と「発展的な学び直し」に着目した指導を充実させることが重要であると考えた。そこで，指導の工夫における視点を次の三点に絞り，研究を進める。第一の視点として，新しい内容に関連する既習内容の定着を図る教材として「学び直しシート」を作成・活用する。第二の視点として，つまずきの把握・克服や理解を深めるために，つまずきを生かした指導を行う。第三の視点として，既習内容の定着を図ったり，新しい内容と関連付けて理解したりするために，既習内容を振り返らせる発問を行う。

視点１	新しい内容に関連する既習内容の定着を図る	→	学び直しシートの活用
視点２	つまずきの把握・克服や理解を深める	→	つまずきを生かした指導
視点３	既習内容の定着と新しい内容を理解する	→	既習内容を振り返らせる発問

学び直しシートとつまずきを生かした指導は，「補充的な学び直し」と「発展的な学び直し」のどちらにも効果があるが，主に「補充的な学び直し」として活用する。また，既習内容を振り返らせる発問は，教師が目的をもって意図的に「補充的な学び直し」と「発展的な学び直し」を使い分けて行う。

(1)　学び直しシートの活用（視点１）

ア　作成の仕方

小単元前に実施するレディネステストの結果を基に，定着度やつまずきを把握した上で作成する。ただし，生徒が解答し，教師が解説するまでの時間が５～７分となるように指導内容を精選する（**図８**）。なお，レディネステストは系統図を基に，新しい内容を学習する上でポイントとなる既習内容を網羅した形になるように作成し，10～15分で解答できる内容とする。

イ　活用の仕方

主に導入段階で活用し，机間指導をしながらヒントを与えたり，既習内容の定着が不十分な生徒が多い場合は，全体に向けて説明したりする。生徒に解答を確認させ，教師の解説後には挙手などによって定着度を確認する。また，既習内容と本時の新しい内容との関連を気付かせるために，展開段階においても活用する。そして，授業後に回収し，評価の一つとして利用する（**図８**）。

主に導入段階で活用する理由は，既習内容の定着が不十分であったり，活用の仕方が分からなかったりすることで問題解決の見通しがもてず，解決が進まない生徒が多くいるからである。導入段階において，既習内容の定着を図り，本時の新しい内容と関連があることを意識させることで，積極的に授業に臨む姿勢をつくることができると考える。

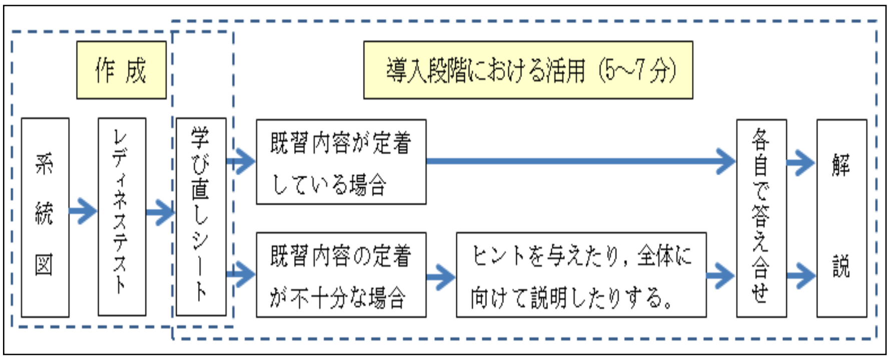


図８ 学び直しシートの作成及び活用

(2)　つまずきを生かした指導（視点２）

生徒のつまずきを把握・分析し，予測することによって，授業の工夫・改善が可能となると考える。また，生徒とっては，様々なつまずきの原因を探ることで理解を深めていくと考える。具体的には，予想される誤答例や授業中に起こる生徒のつまずきを取り上げた指導を行う。一つのつまずきをクラス全体のものとして共有し，原因について，ただ一方的に教師が説明するのではなく，できる限り生徒に考えさせ，ヒントを与えながら正解に導いていくことが大切である。なお，指導した後に，誤答例やつまずきの内容だけが印象に残り，意味の理解の妨げとならないように強調する部分を明らかにしなければならない。

今回，数学Ⅱ「高次方程式」「軌跡と領域」において，「既習内容の定着が不十分なために起こるつまずき」と「既習内容は定着しているが，それを活用できないつまずき」に分類し，予想されるつまずきの例と考えられる具体的な指導を挙げる。

ア　既習内容の定着が不十分なために起こるつまずき

(ｱ)　整式の除法におけるつまずき

図９は，整式の除法で，割られる整式の係数が０の項を空けず，計算が止まっている誤答である（Ｐ14例題参照）。

具体的な指導として，教師がすぐにやり方を提示するのではなく，実際に計算をさせて，同類項を縦に並べることに気付かせることが大切である。また，整数の除法の筆算と比較することで，生徒に気付かせ，理解させることも考えられる。

$$
\begin{array}{r}
x^2 \\
x+2 \,\big)\, \overline{x^3 - x + 6} \\
\underline{x^3 + 2x^2}
\end{array}
$$

図９　整式の除法

(ｲ)　二次式の因数分解と二次方程式の区別

図10は，二次式の因数分解と二次方程式の区別ができていない誤答である。①は問題を二次方程式の解を求めること，②は計算途中であるか，もしくは問題を因数分解することと誤って捉えていることが分かる。

具体的な指導として，整式であることや等式であること，つまり，方程式の等号を挟んだ左辺と右辺が等しいという捉え方をしっかりともたせた上で，因数分解をすることや方程式を解くことの違いを正しく理解させることが重要である。

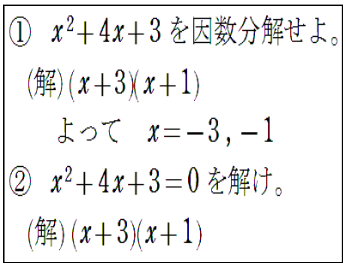


図10 因数分解と方程式

(ｳ)　不等式の読み取りにおけるつまずき

図11は，不等号の向きと座標平面上での領域が逆になっている誤答である。不等号の向きを正しく読み取らず「左が大きい」と視覚的に捉えている。

具体的な指導として，式を「x は２より大きい」と言葉に表してから解くことが考えられる。数学を苦手とする生徒は，記号や式の意味の理解が不十分であり，また，定着するまでに時間が掛かるため，解説する際には，言葉を付け加えたり，言葉を書き残したりするような指導が必要である。

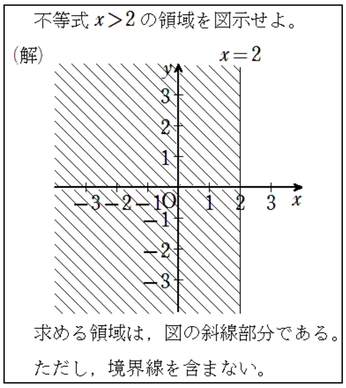


図 11 不等式の読み取り

イ　既習内容は定着しているが，それを活用できないつまずき

・　$x+y=k$ とおくことの理解

図12は，線形計画法の問題である。連立不等式の表す領域を図示することはできるが，$x+y$ を k とおく意味を理解できない生徒が多い。

具体的な指導として，連立不等式の表す領域 D 内に格子点を表して具体的な点をとり，x，y に値を代入して和を考えさせる。それぞれの点における和の変化に着目させて，$x+y=k$ とおく。これを $y=-x+k$ と変形し，傾き-1で y 切片が k の直線であることを確認し，この直線 $y=-x+k$ と領域 D が共有点をもちながら，y 切片 k の値を変化させることで，最大値・最小値を考えることができる。

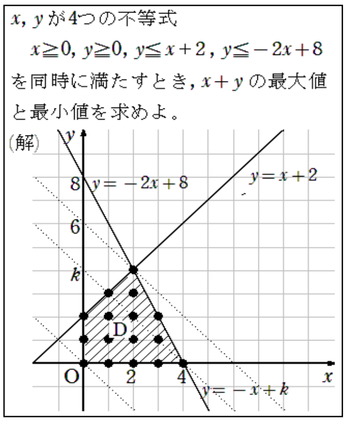


図 12 $x+y=k$ とおくことの理解

(3)　既習内容を振り返らせる発問（視点３）

発問は，既習内容の定着や新しい内容の理解，または，生徒に問題意識や新たな視点などをもたせるために行い，授業を設計する上で中心的な役割を担っている。今回は「学び直し」における発問として，既習内容を振り返らせることに着目する。

つまずきを把握させたり，不十分な理解を気付かせたりするために，発問によって，今までとは違った角度から捉えさせることが大切である。また，新しい内容を理解するために，発問によって，既習内容と比較したり，置き換えたり，類推して，今までの知識とつなげる必要がある。つまり，小・中学校や前時の授業までの既習内容と本時の学習内容を関連付けるきっかけを与えることが大切である。

そこで，「既習内容を振り返り，定着を図る発問」（A）と「既習内容と新しい学習内容をつなげる発問」（B）に大きく二つに分けて，学習過程の各段階において整理した（**次頁表６**）。なお，A は「補充的な学び直し」，B は「発展的な学び直し」にあたる発問となるが，A，B 両方の意味を含んだ発問もある。

表６ 学習過程の各段階における発問例

過程	学習活動（発問の分類）	発問例
導入	1　今までの学習内容を確認する。(A)	・ 前回の○○はどのような方法で解きましたか。
	2　定義を確認する。(A)	・ △△は何でしたか。
展開	3　予測する。(B)	・ どんな結果になりそうですか。
	4　相違点や類似点を明確にする。(B)	・ 今まで学習してきたこととどこが同じでどこが違いますか。
	5　問題解決に必要な既習内容に気付く。(B)	・ 今までに学習してきたことと関係ありませんか。 ・ 今までに学習してきたことを使って考えられませんか。
	6　解決の見通しをもつ。(B)	・ 本時の××はどんな方法で解けそうですか。
	7　解く手順を考える。(B)	・ まず何をするのか。次はどのようなことが考えられますか。
	8　具体化させる。(B)	・ 具体的な数を代入するとどうなりますか。
	9　数学的な概念・性質・内容を見つける。(B)	・ どのような関係・性質がありますか。気付くことはないですか。 ・ いつでも成り立ちますか。どんな場合でも必ず言えますか。 ・ 共通していることは何ですか。
	10　数学的な内容を関連付けていく。(B)	・ 似たようなことは使えませんか。同じことが言えませんか。
	11　根拠を明確にする。(B)	・ なぜその関係が成り立ちますか。なぜ□□と考えたのですか。
	12　よりよいものを求めていく。(B)	・ もっと簡単にできる方法はないですか。
	13　多様な見方や考え方をもつ。(B)	・ 他に方法はないですか。
	14　思考過程を確認する。(A)	・ どのようにして解きましたか。
	15　つまずきを把握する。(A)	・ 分かったところはどこですか。 ・ 分からないところはどこですか。なぜ分からないのでしょうか。
まとめ	16　本時の学習内容を振り返る。(A)	・ 今日学習したことから何が分かりましたか。
	17　本時の学習内容を整理する。(A)	・ 今日学習したことをまとめてみましょう。

４　検証授業の実際と考察

(1)　検証授業の対象及び内容

ア　授業対象　鹿児島県立頴娃高等学校　機械科　第２学年（27 人）

イ　授業内容　数学Ⅱ「高次方程式」「軌跡と領域」

(2)　検証授業Ⅰの事前準備

ア　指導内容の系統図の作成

指導内容の系統性を整理し，学習の連続性を考慮することで，現在の指導内容が，どの既習内容を前提としているのか，今後どのように発展していくのかを把握できる。また，系統性を踏まえ，生徒の実態に基づいた指導を工夫することによって，生徒一人一人の，より確実な基礎・基本の定着が図られる。

今回，数学Ⅱ「高次方程式」における小・中・高等学校の指導内容の系統性を整理し，特につながりの強い既習内容が中心となる系統図を作成した(**次頁図13**)。ただし，現在高等学校第２学年（平成23年４月入学）の生徒を対象としているため，従前の学習指導要領を参考にした。また，本校の工業科の生徒は，数学Ⅰ，Ⅱのみを履修しているため，それ以外の科目は系統図に入れていない。

系統図を基に作成したレディネステストを小単元前に約15分実施し，小・中・高等学校における既習内容の定着度を把握し，生徒のつまずきを分析・考察した。

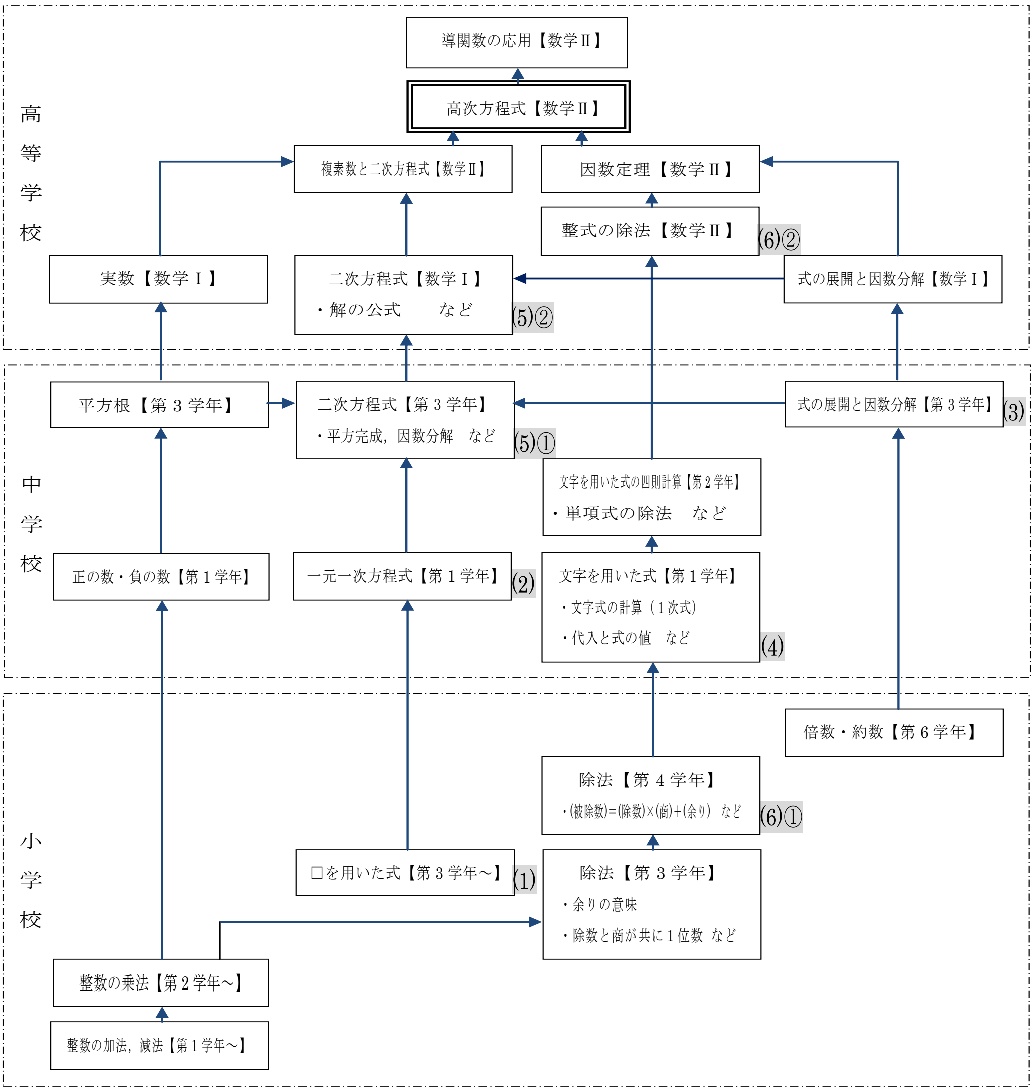


図13　「高次方程式」における系統図

※　系統図の網かけの番号は，**表7**の「高次方程式」のレディネステストの問題番号である。

イ　レディネステストにおける分析

(5)の正答率から，中学校数学や数学Ⅰで学習する二次方程式の解の求め方が不十分であることが分かる。また，その際に高校で学習した解の公式を利用した生徒はごく一部であった。以下に各指導内容の定着状況を述べる（**表7**）。

表7　検証授業Ⅰ「高次方程式」のレディネステストの結果

問　　題	正答率（人数）	誤　答　例
(1)　□×4＝8のとき，□の値を求めよ。	100%(27人)	なし
(2)　一次方程式 $3x+6=0$ を解け。	59%(16人)	$x=2$（6人），無解答(3人)
(3)　x^2-4x+3 を因数分解せよ。	70%(19人)	$x=1,\ 3$（2人），符号の間違い(4人)
(4)　$x=-1$ のとき，x^2-3x-6 の値を求めよ。	56%(15人)	計算・代入ミス（8人），無解答(4人)
(5)　次の二次方程式を解け。		
①　$(x+3)(x-2)=0$	30%(8人)	x^2+x-6（10人），$x^2+x-6=0$（5人）
②　$2x^2-7x+3=0$	22%(6人)	$(2x-1)(x-3)=0$（9人），無解答(8人)
(6)　次の商と余りを求めよ。		
①　472÷13	70%(19人)	計算ミス(7人)，無解答(1人)
②　$(3x^2-8x-11)\div(x-4)$	59%(16人)	計算ミス(2人)，無解答(6人)

(ｱ)　一次方程式の解法

(2)の結果から，41％（11人）の生徒が，定数項を移項して両辺を３で割る処理が正しくできていないことが分かる。直感的に問題を解いたり（**図14**），移項が正しくできていなかったり(**図15**)，一次方程式の意味やその解の意味を理解できていないと考えられる。

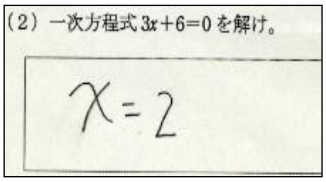


図 14 A 君の解答

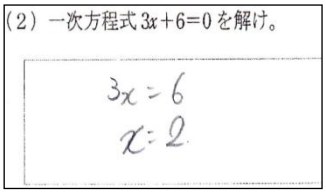


図 15 B 君の解答

(ｲ)　二次方程式の解法

(5)①の結果から，55％（15人）の生徒は，左辺が因数分解された二次方程式をみると，左辺を展開する傾向にあることが分かる。さらに，**図16**は展開の計算が間違っており，**図17**は「＝０」がない解答である。(5)②の結果から，33％（９人）の生徒は「たすき掛け」による因数分解で終わっている状態であり，(5)①と同様，因数分解された二次方程式をその後どうするか分からない状況である。(3)の結果や(5)②を「たすき掛け」で解こうとした生徒が多かったことを考えると因数分解に対する意欲や処理能力は低くないことが分かる。

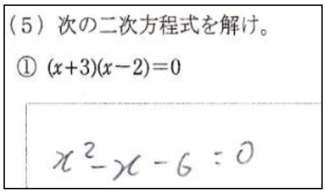


図 16 C 君の解答

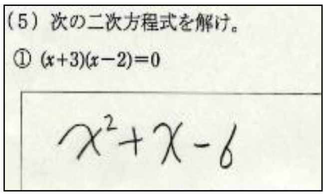


図 17 D 君の解答

ウ　「学び直し」の内容

- 一次方程式のその解の意味を正しく理解させる。
- 計算ミスの対策として，等号をそろえて計算過程をかき残す習慣を身に付けさせ，どこでつまずいているか明示する。
- 「展開する」「因数分解する」「二次方程式を解く」というそれぞれの意味を正しく理解させる。
- 二次方程式を因数分解で解いた後に，求めた解を因数分解された左辺の式に代入し，０になることを確認させ，因数分解を利用するよさを気付かせる。

(3)　検証授業Ｉの実際

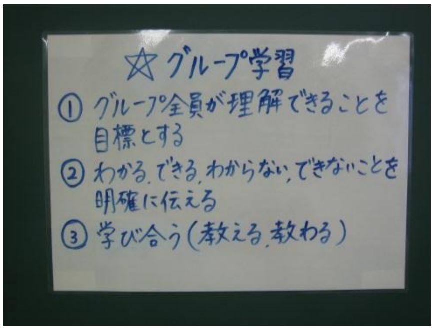
１章　複素数と方程式・式と証明(27単位時間)

２節　複素数と方程式(15単位時間)

	節	項	時間	主な指導内容	「学び直し」の内容	
					学び直しシート（視点１）	つまずきを生かした指導（視点２）
	二　複素数と方程式	因数定理	1	剰余の定理	・ P(x)＝(x－α)Q(x)＋R	
			2	二次式で割った余り レディネステスト	・ 剰余の定理	・ 割る整式と余りの関係
検証授業①			3	因数定理	・ 因数分解	・ 負の値の代入に注意する ・ 整式の除法
検証授業②		高次方程式	1	□³±△³の因数分解の公式の利用	・ 方程式の意味 ・ 一次方程式 ・ 二次方程式	・ □³－△³の因数分解の誤答
検証授業③			2	適当な置き換えの利用	・ 二次方程式	・ 二次式と二次方程式の違い
検証授業④			3	因数定理の利用	・ 一次方程式，二次方程式 ・ 因数定理 ・ 整式の除法	・ 解の公式における分数の約分

ア　検証授業②（数学Ⅱ「高次方程式」１／３）

□^{3}±△^{3}の因数分解の公式を利用し，三次方程式を一次方程式や二次方程式に帰着して，考え，解を求められることを目指す。数学Ⅰで学習した□^{3}±△^{3}の因数分解は，符号や係数を誤りやすい公式なので十分に注意させる。

過程	主な学習活動	○ 指導上の留意点 ●「学び直し」の内容
導入	・　学び直しシートを用いて一次方程式と二次方程式の「学び直し」をする。 ・　掲示用の拡大版の解答で答え合せをし，解説を聞く。	○　机間指導をし，学習状況を把握し，適切なヒントを与える。 ○　解説後，挙手をさせ，生徒の定着度を把握する。
展開	例　方程式 $x^3=1$ を解け。 (解)　$x^3-1=0$ $x^3-1^3=0$ $(x-1)(x^2+x\cdot1+1^2)=0$ $(x-1)(x^2+x+1)=0$ $x-1=0$ または $x^2+x+1=0$ $x=1$，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$ $=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$ $=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ よって　$x=1$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ 練習　次の方程式を解け。 (1) $x^3=8$　　(2) $x^3+1=0$ 	●　既習内容を振り返らせる発問②（次頁表８）を行う。 ○　直感的に解を求めさせてから，既習内容を活用して解くことを考えさせる。 ●　□^{3}±△^{3}の因数分解の公式を掲示し，因数分解や展開の意味を確認する。 ●　学び直しシート②（次頁図18）一次方程式(3)，二次方程式(4)を③，(5)③を参照させる。 ●　「ルートの中が負になる数はありますか」や「二乗して－３になる数をどのように表しますか」と発問し，同単元で学習した複素数を確認させる。 ●　つまずきを生かした指導②（次頁図19）を行う。 ○　前時に引き続き，生徒同士で学び合う活動の意義や方法を説明する。 
まとめ	・　本時のまとめをし，「分かる」「できる」チェックシートを記入する。（P16図22参照）	○　方程式の意味，□^{3}±△^{3}の因数分解の公式，解の公式，複素数などの既習内容を理解していれば，本時の高次方程式が解けることを確認する。

(ｱ)　学び直しシートの活用（視点１）

レディネステストの結果より，方程式に関する理解が不十分で，必要とされる技能が身についていない生徒がいるため，(1)(2)の問題を入れた。(3)で三次方程式を解く際の一次方程式を扱い，(4)(5)で二次方程式の解法の三つのパターンを示した。(4)については，因数分解と解の公式はすぐ答えられるが，平方根の利用は忘れられている傾向であった（**図18**）。

(ｲ)　つまずきを生かした指導（視点２）

実際に右辺を展開して等式が成り立つかどうかを確認させた（**図19**）。文字に対する抵抗感を和らげさせるため，公式は文字を使わず，□^{3}±△^{3}で提示した。

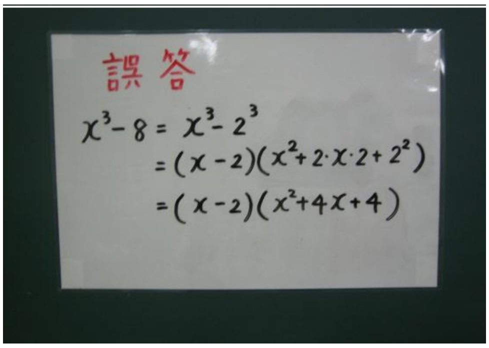


図19 つまずきを生かした指導②

(ｳ)　既習内容を振り返らせる発問（視点３）

まず，興味をもたせるために直感的に解を求めさせた。次に，一次方程式や二次方程式の学習の延長であることを気付かせる発問を心掛けた。また，どのような因数分解を学習してきたか振り返らせた。さらに，数学が苦手な生徒にとっては式の提示だけでなく「三乗して１になる数は？」という発問も行った。

(ｴ)　その他

学習形態として，検証授業Ⅰでは学び合い活動を取り入れた。「高次方程式」において，生徒同士で教え合うことによって，「学び直し」がより効果的になると考えた。最初は慣れない活動で，積極的な生徒は少なかったが，学び合えるクラスの雰囲気づくりに心掛け，的確な言葉掛けをすることによって，少しずつ充実した活動になった。

学び直しシート　～高次方程式①～

(　　　)科(　　)番　氏名(　　　　　)

(1) 方程式とは？

[　　　　]を方程式という。主に文字はxで表され，方程式が成り立つxの値を求めることができる。

(2) 一次方程式の解き方は？

両辺に同じものを[　　　　　　　　]できる等式の性質を利用する。

(3) 次の一次方程式を解け。

① $x+4=0$　　② $2x-6=0$

(4) 二次方程式の解き方は？

①

②

③

(5) 次の二次方程式を解け。

① $x^2=9$　　② $x^2-x-6=0$　　③ $x^2+3x+1=0$

図18 学び直しシート②

表８ 既習内容を振り返る発問②（□はＰ９表６参照）

Ｔ：教師の発問　Ｓ:生徒の反応		
Ｔ：	初めて学習する方程式です。これは何次方程式ですか。	1－A
S_1：	三次方程式。	
Ｔ：	直感的に解はいくらになりそうですか。	
S_1：	１です。	3－B
Ｔ：	正解です。なぜですか。	14－A
S_2：	代入すれば成り立つから。	
Ｔ：	そうです。他に解はありませんか。	3－B
S_2：	…。	
Ｔ：	学び直しシートで一次方程式，二次方程式を解きました。今回の三次方程式は，これらを基に解けそうですか。	5－B
S_3：	因数分解？	
Ｔ：	因数分解できそうですか。	3－B
S_2：	…。	
Ｔ：	このままではできません。右辺を？	3－B
S_1：	移項する。	
Ｔ：	どの因数分解の公式が使えそうですか。	1－A

イ　検証授業④（数学Ⅱ「高次方程式」３／３）

因数定理，整式の除法，因数分解，解の公式を用いる内容であり，方程式の意味や一次方程式，二次方程式の解法の十分な理解が必要とされる。そのためにも，関連する既習内容が多いが，導入段階において一つ一つについて「学び直し」を行う。

過程	主な学習活動	○ 指導上の留意点 ●「学び直し」の内容
展 開	例題　三次方程式$x^3-x+6=0$ を解け。 （解）$P(x)=x^3-x+6$ とおくと $P(-2)=(-2)^3-(-2)+6$ $=-8+2+6$ $=0$ よって，$P(x)$ は$x+2$ を因数にもつ $P(x)=(x+2)(\quad\quad)$ $$\begin{array}{r} x^2-2x+3 \\ x+2\,\big)\overline{x^3\qquad\;\;-x+6} \\ \underline{x^3+2x^2\qquad\qquad} \\ -2x^2-x\quad \\ \underline{-2x^2-4x\quad} \\ 3x+6 \\ \underline{3x+6} \\ 0 \end{array}$$ $P(x)=(x+2)(x^2-2x+3)$ $(x+2)(x^2-2x+3)=0$ より $x+2=0$ または $x^2-2x+3=0$ $x=-2$，$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}$ $=\dfrac{2\pm\sqrt{-8}}{2}$ $=\dfrac{2\pm2\sqrt{2}i}{2}$ $=1\pm\sqrt{2}i$ よって　$x=-2,\ 1\pm\sqrt{2}i$ 練習　次の方程式を解け。 (1) $x^3+x^2-9x-9=0$ (2) $x^3-3x-2=0$ 	● 既習内容を振り返らせる発問④（次頁表９）を行う。 ○ 何を代入するかは，各自で見付けさせる。 ● 学び直しシート④（次頁図20）因数定理(4)を参照させる。 ● 意図的に整式の除法の筆算で項をつめて板書を行い，二乗の項を空けることを思い出させる（Ｐ７図９）。 ● 学び直しシート④（次頁図20）整式の除法(5)を参照させる。 ○ 上から下を引くときは，符号に気を付けさせる。 ○ 余りが０になることを確認させる。 ○ P(x)を因数分解した式に「＝0」を付けることを強調し，因数分解で終わらず，三次方程式の解を求める問題であることを意識させる。 ● 学び直しシート④（次頁図20）一次方程式(1)，二次方程式(3)②を参照させる。 ● つまずきを生かした指導④（次頁図21）を行う。  ○ 各自で取り組ませた後，グループになって学び合わせる。つまずいた生徒は，教師または友だちに質問させる。早く解き終わった生徒は，つまずいている生徒に教えるように指示する。 ○ 指名した生徒に，板書させる。

(ｱ)　学び直しシートの活用（視点１）

今回の三次方程式で必要とされる全ての既習内容を学び直しシートで取り扱った。(1)～(3)は繰り返し指導してきたため，時間を考慮し，一つ一つの内容を丁寧に説明せず，確認程度とし，(4)(5)を中心に指導した（**図20**）。

(ｲ)　つまずきを生かした指導（視点２）

「この約分はなぜ誤りか」を発問したところ，期待した解答は得られなかった（**図21**）。分子を２でくくり出し，因数分解してから約分することで，このような誤答も減ると考えられる。

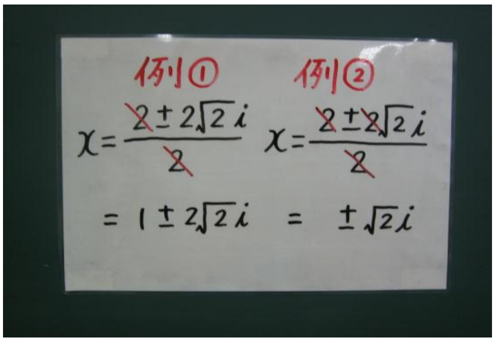


図 21　つまずきを生かした指導④

また，併せて x の係数が偶数の場合の解の公式や平方完成を利用した解き方を提示し，解を確認させるとともに，二次方程式においてよりよい解き方を確認させた。

(ｳ)　既習内容を振り返らせる発問（視点３）

既に学習した高次方程式の二つのパターンの問題を板書しながら発問を行い，確認させた。今回の高次方程式と比較し，同じところや違いについて考えようとする様子が見られた（**表９**）。

(ｴ)　その他

前回までの高次方程式を基に，今回の高次方程式をどのように解くか考えさせ，『新しい内容の学習の前提となるレディネスの確認と形成に着目した学び直し』を行った。因数定理は，学び直しシートで取り組んでおり，すぐに活用する生徒もいた。また，整式の除法の定着を図るため，組み立て除法は敢えて使わなかった。

学び直しシート　～高次方程式③～

(　　　　)科(　　)番　氏名(　　　　　　　　)

(１) 次の一次方程式を解け。

①　$3x+6=0$　　　②　$4x-2=0$

(２) 次の式を因数分解せよ。

①　x^2-4　　　②　x^2-6x+9

(３) 次の二次方程式を解け。

①　$x^2+4x+3=0$　　　②　$x^2+3x-1=0$

(４) 因数定理とは？

整式 P(x)が $\boxed{}$ を因数にもつ　⇔　P(α)＝ $\boxed{}$

例　　整式 P(x)＝$3x^2-x-2$ は，P(1)＝ $\boxed{}$ ＝ $\boxed{}$

よって　P(x)は $\boxed{}$ を因数にもつ。

因数分解すると　$3x^2-x-2=($　　　$)($　　　$)$

(５) 次の割り算を行い，商と余りを求めよ。

①　597÷21　　　②　$(3x^2-x-2)\div(x-1)$

図 20 学び直しシート④

表９　既習内容を振り返らせる発問④（□はＰ９表６参照）

Ｔ：教師の発問　Ｓ:生徒の反応		
Ｔ　：	前回までの高次方程式はどのように解いてきましたか。	1－A
S_1：	３乗の公式。	
Ｔ　：	３乗引く３乗をどうしましたか。	1－A
S_2：	因数分解。	
Ｔ　：	そうです。他にありませんでしたか。	
S_3：	Ａとおく。	1－A
Ｔ　：	そうです。Ａとおいて次数を下げ，二次式にして因数分解しました。それでは，これらのことを踏まえて今回の高次方程式は，どのように解くことができそうですか。	5－B
Ｓ　：	…。	
Ｔ　：	前回まで三次方程式は左辺を因数分解してきました。今回も因数分解できそうですか。	5－B
Ｓ　：	…。	
Ｔ　：	どのような因数をもつか…学び直しシートを見てごらん。	
S_2：	因数定理。	

(4)　検証授業Ⅰの成果及び課題

ア　成果

授業終了前に「分かる」「できる」チェックシート（**図22**）で生徒に自己評価をさせ，「３　どこでつまずいたかが分かった」「４　つまずきを克服することができた」の項目に対する生徒の変容をみた。**図23，24**から，検証授業前の実態調査と検証授業Ⅰの後の調査を比較すると，どちらの項目も，肯定的に捉えた生徒が増加し，一定の成果はあったと考えられる。

(ｱ)　学び直しシートの活用（視点１）

授業後の生徒の感想には「学び直しシートがあって何ができて何ができなかったかがはっきりして良かったと思う」「授業の初めにするプリントで自分の苦手な部分を知ることができた」など肯定的な意見が多く，概ね良好であった。

(ｲ)　つまずきを生かした指導（視点２）

事前に誤答を予測し，誤答を提示することで，注目させることができ，同じ誤りをする生徒はいなかった。

(ｳ)　既習内容を振り返らせる発問（視点３）

「高次方程式」は，生徒にとって比較的取り組みやすい内容で，既習内容と関連させて考えることができたようであった。既習内容が定着している生徒は，発問に対して反応もよく，意欲的に取り組む姿が見られた。

イ　課題

(ｱ)　学び直しシート（視点１）

「高次方程式」は関連する既習内容が多く，指導内容を絞ることができず，予定より若干時間がかかってしまった。より内容を精選していくことが必要とされる。また，レディネステストの結果だけではなく，日頃の生徒の実態を踏まえた内容も取り入れていくことが大切であると考える。例えば，対象のクラスの多くの生徒が，参考例がなければ自力で取り組むことができないため，学び直しシートに例題とその解き方を取り入れる。

(ｲ)　つまずきを生かした指導（視点２）

理解を深めさせるために「なぜ誤りか」という原因を考えさせたが，生徒が的確な説明をするところまで至らなかった。

(ｳ)　既習内容を振り返らせる発問（視点３）

生徒の思考を促すことができるように心掛けたが，つまずきの根が深い生徒とって，既習内容を振り返り，「考えたくなる」発問となっていなかった。一つの発問に対して，生徒の実態や定着度に応じたいくつかの助言を準備する必要があった。

本日の数学の授業で，何が分かって，何ができたかを確認したいと思います。該当する数字に○をつけてください。

4…よくあてはまる，3…ややあてはまる，2…あまりあてはまらない，1…全くあてはまらない

1	授業の始まりに，その時間に何を学習するかが分かった。	4　3　2　1
2	関心・意欲をもって授業を受けることができた。	4　3　2　1
3	どこで，つまずいたかが分かった。	4　3　2　1
4	つまずきを克服することができた。	4　3　2　1
5	$□^3 ± △^3$ の因数分解ができた。	4　3　2　1
6	一次方程式を解くことができた。	4　3　2　1
7	二次方程式を解くことができた。	4　3　2　1
8	$□^3 ± △^3 = 0$ を解くことができた。	4　3　2　1
9	先生の説明が分かった。	4　3　2　1
10	友だちの説明が分かった。	4　3　2　1
11	友だちに説明することができた。	4　3　2　1
12	自分の考えを文章や式などで表現することができた。	4　3　2　1
13	数学のよさが分かった。	4　3　2　1

図22　「分かる」「できる」チェックシート②

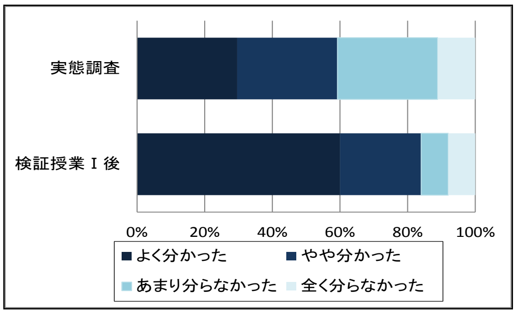


図23　「３　どこでつまずいたかが分かった」

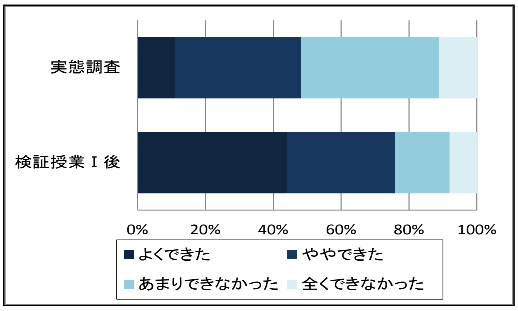


図24　「４　つまずきを克服することができた」

(5)　検証授業Ⅱの事前準備

ア　指導内容の系統図の作成

前回と同様に，数学Ⅱ「軌跡と領域」における指導内容の系統性を整理した（**図 25**）。

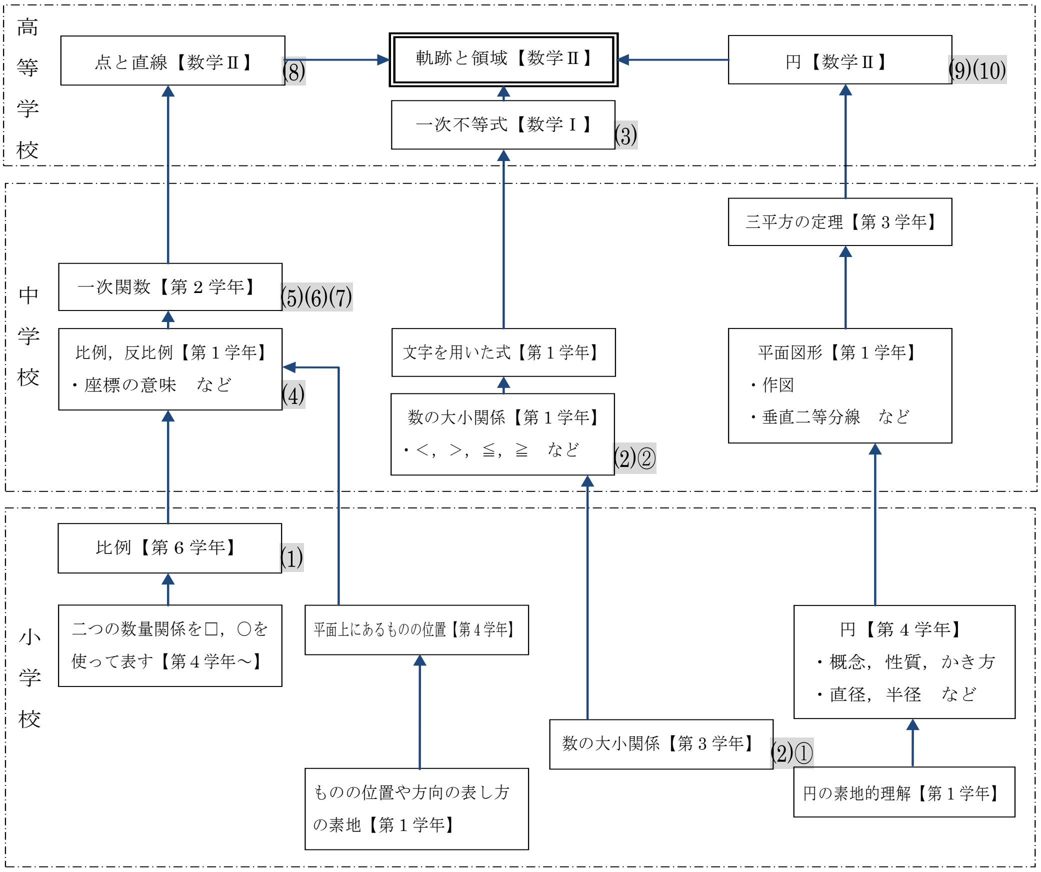


図 25　「軌跡と領域」における系統図

※　系統図の網かけの番号は，**表 10** の「軌跡と領域」のレディネステストの問題番号である。

イ　レディネステストにおける分析

(8)～(10)の数学Ⅱの指導内容だけでなく，不等号の性質や一次関数のグラフについても定着していないことが分かり，無解答が目立つ結果となった。以下に各指導内容の定着状況を述べる（**表 10**）。

表 10　検証授業Ⅱ「領域と方程式」のレディネステストの結果

問　　題	正答率（人数）	誤　答　例
(1)　4：3＝□：6のとき，□を求めよ。	81%(21 人)	計算ミス(1人)，無解答(4人)
(2)①　不等式 A>B の読み方をかけ。	77%(20 人)	無解答(3人)
②　不等式 A≦B の読み方をかけ。	31%(8人)	無解答(7人)，より大きい(3人)，より小さい(3人)，未満(2人)，A は B 以上(1人)
(3)　不等号の向きが変わるのは，どのようなときですか。［選択問題］	15%(4人)	移項して負になるとき(11 人)，両辺を同じ数で引いたとき(1人)，両辺に負の値を掛けたときのみ(7人)，無解答(3人)
(4)①　点(−2，1)を図示せよ。	23%(6人)	無解答(18 人)
②　点(0，3)を図示せよ。	27%(7人)	無解答(18 人)
③　点(−2，3)を読み取る。	81%(21 人)	無解答(2人)
④　点(0，−3)を読み取る。	73%(19 人)	点(−3，0)(4人)，無解答(2人)

(5)① 直線$y=-x+2$を図示せよ。	15%(４人)	$y=-2x$(６人)，$y=x+2$(３人)
② 傾きを求めよ。	69%(18人)	無解答(６人)
③ y切片を求めよ。	77%(20人)	無解答(５人)
(6) 直線$y=x+1$上にある点を３つ求めよ。	35%(９人)	無解答(12人)
(7) $3x-2y-6=0$を$y=mx+n$に変形せよ。	31%(８人)	無解答(12人)
(8) ２点A，Bについて次の値を求めよ。		
① 線分ABを１：２に内分する点の座標	38%(10人)	無解答(13人)
② ２点間の距離AB	27%(７人)	無解答(14人)
(9)① 円$x^2+y^2=4$を図示せよ。	19%(５人)	無解答(21人)
② 中心の座標を求めよ。	23%(６人)	無解答(20人)
③ 半径を求めよ。	19%(５人)	無解答(20人)，4(１人)
(10) 円$x^2+y^2-2x+4y+4=0$の中心の座標と半径を求めよ。	16%(４人)	無解答(20人)

(ｱ) 不等号の読み方と性質

(2)から不等号の読み方について，イコールが付くと正答率が下がり，文章の意味を読み取れない解答も多かった。(3)の不等号の向きが変わることに関する選択問題は選択肢が文章であったため，意味を正しく読み取ることができず正答率が低かったと考えられる。

(ｲ) 直線の図示

(4)，(5)①，(9)①の結果から，座標平面上における点，直線，円の図示は，約80％の生徒が苦手であることが分かる。特に，直線の図示に関しては，傾きとy切片の値を通る点の座標と捉えたり（**図26**），傾き－１の意味を分かっていなかったり（**図27**）する誤答が目立った。また，(6)の結果から，直線が方程式を満たす点の集合としてみる考えの理解が不十分であると考えられる。

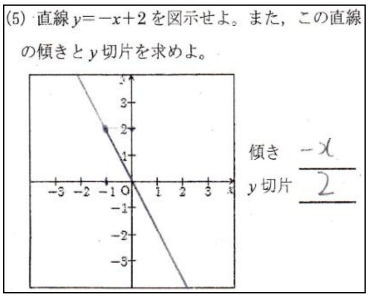


図26 E君の解答

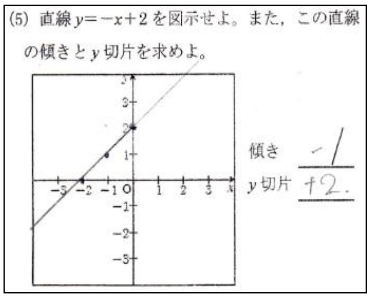


図27 F君の解答

(ｳ) 直線の方程式の式変形

(7)の結果から，前回のレディネステストの(2)と同じような計算ミスがあり，改善されていなかった。移項で符号が変わっていなかったり（**図28**），両辺を正しく割ることができていなかったり（**図29**），単純な計算ミスが多かった。

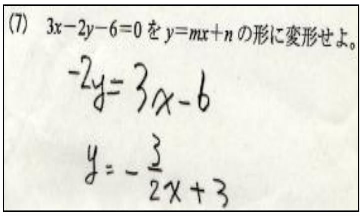


図28 G君の解答

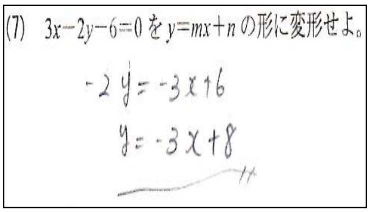


図29 H君の解答

(ｴ) 座標平面上における内分点の座標

(8)①の正答率は，思っていたほど低くなかった。理由として，教科書に載っているx，yやm，nの文字を使った公式でなく，求め方

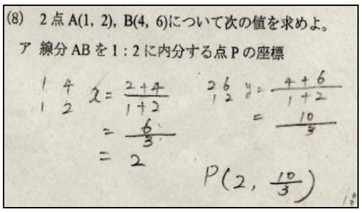


図30 I君の解答

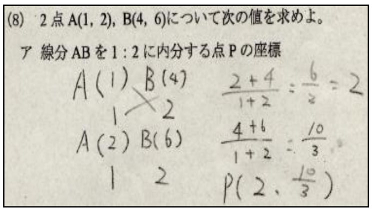


図31 J君の解答

を形として覚えさせ，生徒の記憶に残っていたからであろう（**前頁図30，31**）。難しい公式や覚えにくい公式を簡単な形で記憶させて取り組ませることで，生徒が意欲をもって取り組み，簡単に求められると実感すれば，定着もよいと考えられる。

(ｵ)　円の方程式の式変形

円の方程式については，約80％の生徒が不十分な理解の状態で定着まで至っていないことが分かった。式変形を十分に理解せず，機械的に行っており，問題文の式と同じであるという意識も低い傾向にある（**図32，33**）。また，**図32**から，半径の長さに虚数単位 i が含まれており，円の半径が正の数であることや虚数で長さを表せないことを理解していないことが伺える。さらに，式変形の前に文字を分けて，項べきの順に整理する際に括弧をつけることを指導したが，**図33**から，括弧を含む計算の定着が不十分であることが伺える。

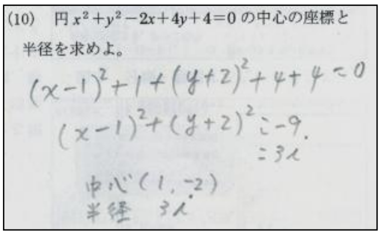


図 32 Ｋ君の解答

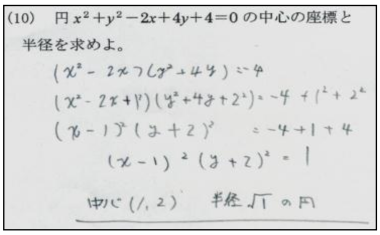


図 33 Ｌ君の解答

ウ　「学び直し」の内容

- 不等号の読み方や性質について定着を図るため，随時確認させる。
- 直線の図示の際，x と y の対応表を作成させ，直線は方程式を満たす点の集合であることを確認させる。
- 生徒自身に「どのような計算ミスが多いか」「どのように計算の方法を誤って捉えているか」を自覚させ，改善しようとする意識を高めさせながら，等式変形の定着を図る「補充的な学び直し」を行う。授業以外の時間を利用し，個別指導をする。
- 難しい公式は，まず簡単な求め方で定着させてから，次にその意味を理解させる。
- 円の方程式の式変形の意味を理解させる中で，展開や因数分解などの基本的な知識・技能も確認させる。

(6)　検証授業Ⅱの実際

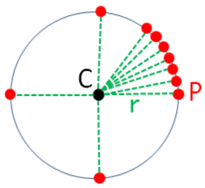
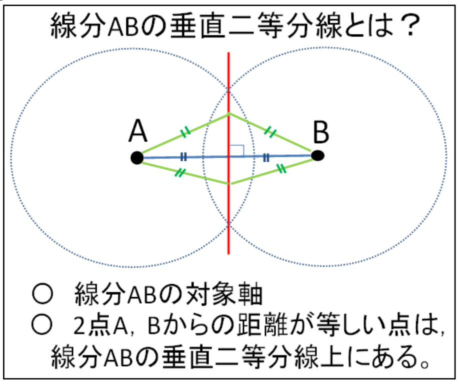
２章　図形と方程式（27単位時間）

３節　軌跡と領域（６単位時間）

	節	項	時間	主な指導内容	「学び直し」の内容	
					学び直しシート（視点１）	つまずきを生かした指導（視点２）
検証授業⑤	三　軌跡と領域	軌跡の方程式	1	軌跡の方程式 アポロニウスの円	・座標平面上の２点間の距離 ・垂直二等分線 ・円の方程式の式変形	・（□－△）^{2}の誤答例
検証授業⑥			2	定点と円周上の動点を結ぶ線分を一定に内分する点の軌跡	・図形上を通る点 ・座標平面上の内分点の座標 ・指数法則	・求める点を（x，y）とおく
検証授業⑦		不等式の表す領域	1	直線で分けられた領域	・直線の図示	・領域の図示における誤答
検証授業⑧			2	円で分けられた領域	・円の図示 ・円の方程式の式変形	・領域の図示における誤答
		連立不等式の表す領域	1	連立不等式の表す領域	・連立不等式	
			2	領域と最大値・最小値	・直線$y=-x+k$の図示	・なぜ$x+y=k$とおくか

ア　検証授業⑤（数学Ⅱ「軌跡の方程式」１／２）

文章問題が苦手であるため，与えられた条件が何で，求めるものが何かをしっかり読み取らせる。レディネステストの結果より，座標平面上における点の図示ができない生徒が多かったことを踏まえ，丁寧に説明する。「図形と方程式」の中で「軌跡」は，多くの生徒が苦手意識をもつ内容である。そこで，与えられた条件を満たす点の集合がどのような図形を表しているかを視覚的に捉えさせ，イメージしやすくするためにICTを活用する。

過程	主な学習活動	○ 指導上の留意点 ●「学び直し」の内容
導入	・　学び直しシートを用いて２点間の距離の「学び直し」をする。 ・　スクリーンを用いて答え合せをし，解説を聞く。	○　机間指導をし，学習状況を把握しながら，適切なヒントを与える。 ○　２点間の距離の公式は，三平方の定理から導き出していることを確認させ２点の x 座標，y 座標を意識させる。
展開	Q　定点Cから一定の距離 r にある点Pの描く図形は？  与えられた条件を満たす点全体の描く図形を，その条件を満たす点の軌跡という。 例１　2定点A(2，0)，B(0，2)からの距離が等しい点Pの軌跡を求めよ。 (解)　点Pを$(x，y)$とおくと AP=BP $AP=\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}$ $BP=\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}$　より $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-2)^2}$ 両辺を2乗すると $(x-2)^2+y^2=x^2+(y-2)^2$ $x^2-4x+4+y^2=x^2+y^2-4y+4$ $y=x$ よって　点Pの軌跡は直線$y=x$ 線分ABの垂直二等分線である。	●　スクリーンを用いて，図形は点の集合であることを確認させる。  ●　既習内容を振り返らせる発問⑤（次項表11）を行う。 ○　座標平面上に２定点Ａ，Ｂを取らせどんな軌跡になるか予想させる。 ○　軌跡の問題は，与えられた条件を満たす点を$(x，y)$とおくことを理解させる。 ●　学び直しシート⑤（次頁図34）を参照にさせる。 ●　つまずきを生かした指導⑤（次項表35）を行う。 

(ｱ)　学び直しシートの活用（視点１）

２点間の距離の公式を思い出させるために公式の導き方の１を，また，軌跡の方程式につなげるために２(2)の問題を入れた（**図34**）。これによって，例１でAP，BPを式で表すことは比較的スムーズであった。

(ｲ)　つまずきを生かした指導（視点２）

「どこに誤りがあるか」「なぜ誤りなのか」を発問し，全体に注意を促した（**図35**）。機械的に計算していた生徒や公式を利用していなかった生徒に対して，公式の意味を理解させるとともに，利用することのよさを感じさせた。

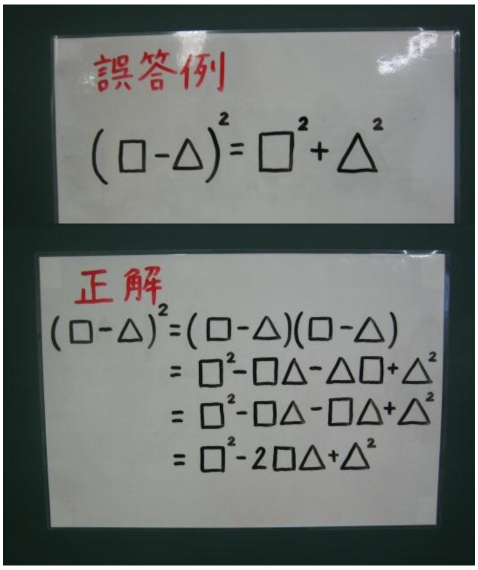


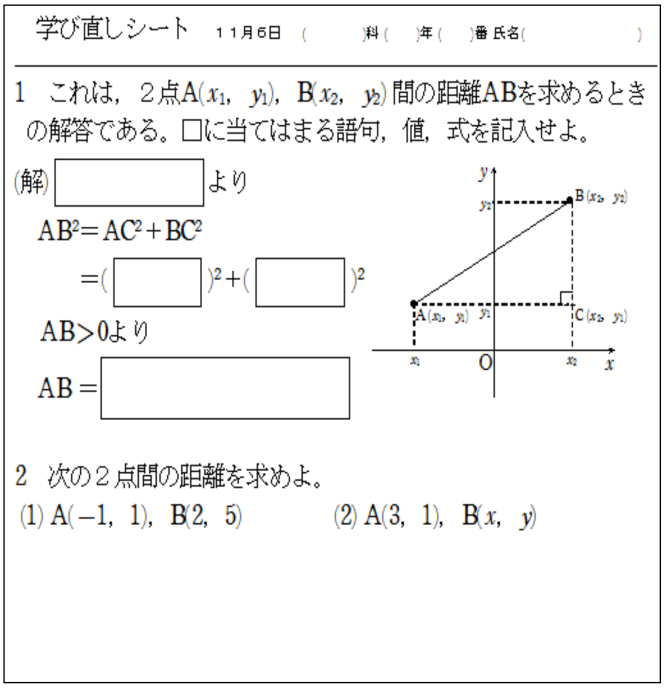
図 35 つまずきを生かした指導⑤

(ｳ)　既習内容を振り返らせる発問（視点３）

座標平面上における点，直線，円の図示を苦手とする生徒が多いため，イメージをもたせ，軌跡を予測できるような発問に心掛けた（**表11**）。距離を長さと言い換えたり，２点間の距離の作図でコンパスを利用したりした。

(ｴ)　その他

中学校第１学年で学習した垂直二等分線について，例１の解説後にスクリーンを用いて説明し，『異校種間の内容のスパイラルな接続を意識した学び直し』を行った。中学校で学習した内容の復習となるとともに，例１の内容の理解を深めることができた。



学び直しシート　11月6日（　　）科（　）年（　）番 氏名（　　　）

1　これは，2点A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$間の距離ABを求めるときの解答である。□に当てはまる語句，値，式を記入せよ。

(解) □ より

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= (\square)^2 + (\square)^2$

AB>0より

AB = □

2　次の２点間の距離を求めよ。

(1) A(−1，1)，B(2，5)　　(2) A(3，1)，B$(x,\ y)$

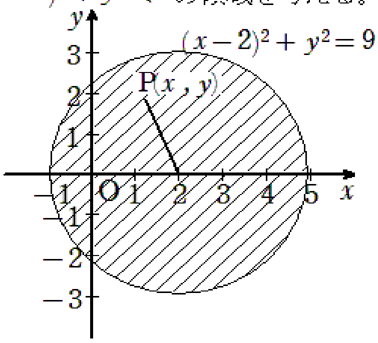
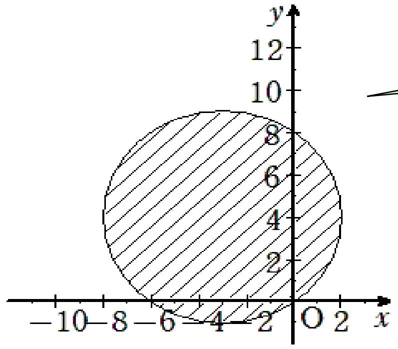
図 34 学び直しシート⑤

表 11 既習内容を振り返らせる発問⑤（□はＰ９表６参照）

T：教師の発問　S：生徒の反応		
T	：２定点 A，B からの距離が等しい点 P を一つとってごらん。	3−B
S$_1$	：（原点を示す）	
T	：まだとれませんか。	3−B
S$_2$	：（線分 AB の中点を示す）	
T	：まだとれませんか。このように考えていくと点 P の軌跡はどのようになりそうですか。	3−B
S$_3$	：直線。	
T	：どのような直線ですか。	1−A
S$_1$	：（指で線を引く）	
T	：（指名し板書させる）	
T	：明らかですか。それではこの直線を式で表すと，どのように表すことができますか。	5−B
S	：…。	
T	：ここで点 P は座標平面上での点です。点 P をどのようにおきますか。	3−B
S$_1$	：$(x,\ y)$ とおく。	
T	：それでは，線分 AP を x，y を使ってどのように表すことができますか。	5−B
S	：…。	
T	：学び直しシートを見てごらん。	
S$_3$	：２点間の距離の公式を利用する。	

イ　検証授業⑧（数学Ⅱ「不等式の表す領域」２／２）

本時のねらいは，中心からの距離が円の半径より小さい点の集まりが円の内部であり，中心からの距離が円の半径より大きい点の集まりが円の外部であることを理解させることである。前単元「円の方程式」では，式変形の演習はしているが，座標平面上における円の図示はほとんど扱っていない。また，レディネステストの結果より，コンパスの使い方や中心の座標の取り方など円の図示の仕方を丁寧に説明する必要がある。

過程	主な学習活動	○ 指導上の留意点 ●「学び直し」の内容
導入	・　学び直しシートで，円の作図と円の方程式の式変形の「学び直し」をする。	○　円の作図についてはスクリーンを用いて，丁寧に説明する。
展開	問　$(x-2)^2+y^2<9$の領域を考える。  (解) 円の内部にある点をP$(x,\ y)$ とすると 中心$(2,\ 0)$からの距離は $\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ である。これが円の半径3より小さいことより　$\sqrt{(x-2)^2+y^2}<3$ $(x-2)^2+y^2<9$ よって，求める領域は円の内部 例４　$x^2+y^2+6x-8y<0$ (解)　$x^2+6x+y^2-8y<0$ $x^2+6x+3^2-3^2+y^2-8y+4^2-4^2<0$ $(x+3)^2+(y-4)^2<25$ 中心$(-3,\ 4)$，半径5の円の内部  求める領域は，図の斜線部分である。 ただし，境界線を含まない。	●　不等号の向き，意味，読み方を確認させる。 ●　既習内容を振り返らせる発問⑧（次項表12）を行う。 ●　$(x-2)^2+y^2=9$ は中心$(2,\ 0)$，半径３の円であることを確認させる。 ●　学び直しシート⑧（次頁図36）１を参照にさせる。 ○　ノートの座標平面上に円を図示させて理解度を把握する。 ○　円の内部の点Ｐを$(x,\ y)$とおき，中心から点Ｐまでの２点間の距離と半径の長さの関係に着目させる。 ●　２点間の距離の公式を確認させる。 ●　「ルートの記号をどうすれば消すことができるか」を発問する。 ●　学び直しシート⑧（次頁図36）２を参照させる。 ○　座標軸の取り方，半径が５ということはどの点を通ることになるか確認させる。 ●　学び直しシート⑧（次頁図36）１を参照させる。  ●　つまずきを生かした指導⑧（次頁図37）を行う。

(ｱ)　学び直しシートの活用（視点１）

レディネステストにおいて，円の図示の正答率が19％であったため，円の図示を取り入れた（**図36の１**）。また，時間を考慮し，例４と同じ内容としたことよって，展開過程における演習をスムーズに取り組ませることができた。

(ｲ)　つまずきを生かした指導（視点２）

練習問題に入る直前に，斜線を使った領域表示の誤答例をスクリーンで示すことによって（**図37**），領域の斜線がかき足りない解答の生徒はいなかった。しかし，円の外部の領域に関しては，斜線が座標平面の範囲を飛び出す解答があり，もう一度スクリーンを見せたり，なぜ誤りかを考えさせたりした。

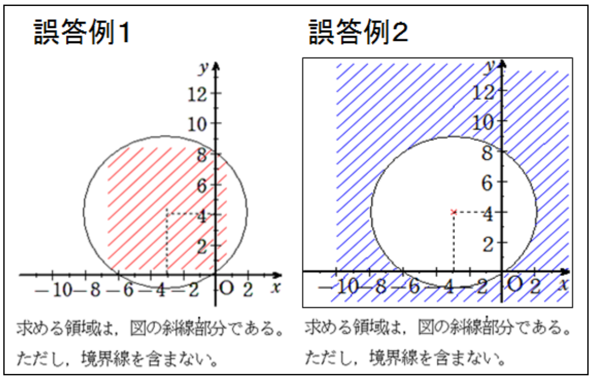


図 37 つまずきを生かした指導⑧

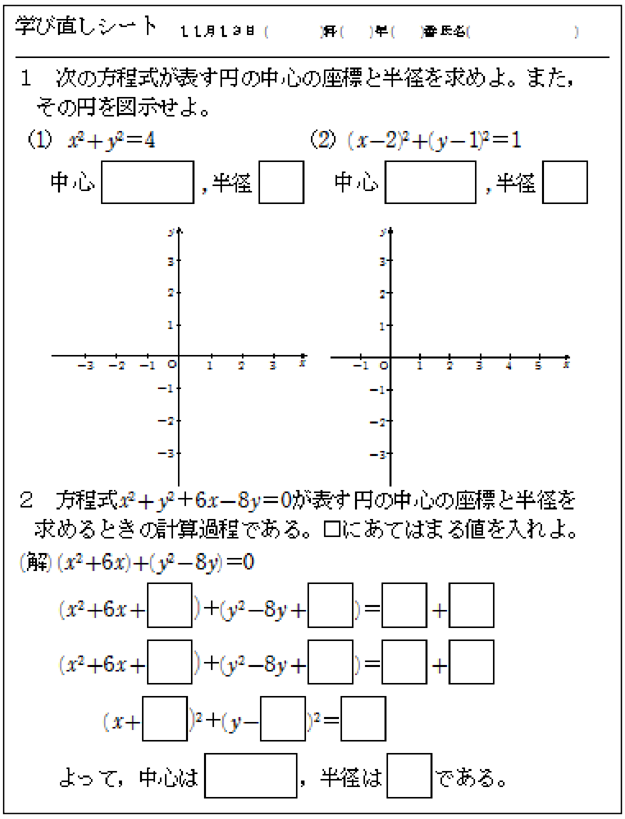
(ｳ)　既習内容を振り返らせる発問（視点３）

発問と同時に，不等式に具体的な値を代入させる際に黒板に計算例を示して確認させたり，中心から点Ｐまでの距離と半径の長さを確認する際にスクリーンを活用して考えさせたりした（**表12**）。

(ｴ)　その他

不等式の x，y に代入して満たすときの点を，座標平面上に図示して，円との位置関係を考えさせる『異なる領域の内容の相互関係を意識した学び直し』を行った。

円の図示に関して，中心を取る段階で止まったり，座標平面の枠から円がはみ出したりする解答があった。また，第何象限を中心に円をかくか予測して座標軸を取ることに苦労している生徒もおり，本時の学習のワークシートを準備するべきであった。



学び直しシート　11月13日(　　　)年(　)組(　)番 氏名(　　　　　)

1　次の方程式が表す円の中心の座標と半径を求めよ。また，その円を図示せよ。

(1) $x^2+y^2=4$　　中心 $\boxed{}$，半径 $\boxed{}$

(2) $(x-2)^2+(y-1)^2=1$　　中心 $\boxed{}$，半径 $\boxed{}$

2　方程式 $x^2+y^2+6x-8y=0$ が表す円の中心の座標と半径を求めるときの計算過程である。□にあてはまる値を入れよ。

(解) $(x^2+6x)+(y^2-8y)=0$

$(x^2+6x+\boxed{})+(y^2-8y+\boxed{})=\boxed{}+\boxed{}$

$(x^2+6x+\boxed{})+(y^2-8y+\boxed{})=\boxed{}+\boxed{}$

$(x+\boxed{})^2+(y-\boxed{})^2=\boxed{}$

よって，中心は $\boxed{}$，半径は $\boxed{}$ である。

図 36 学び直しシート⑧

表 12 既習内容を振り返らせる発問⑧（□はＰ９表６参照）

Ｔ：教師の発問　Ｓ：生徒の反応	
Ｔ	：不等式 $(x-2)^2+y^2<9$ を満たす x，y の組み合わせをいくつか考えてごらん。 $\boxed{8-B}$
S_1	：$x=0$，$y=0$
Ｔ	：そうです。代入すれば満たします。それでは，それらを座標平面上に点として図示してくだい。
Ｔ	：何か気付くことはありませんか。 $\boxed{9-B}$
Ｓ	：…。
Ｔ	：円の？
S_2	：中。
Ｔ	：本当に？ちなみに，円の内部と言います。円の内部の点ならば，いつでも不等式は満たしますか。どのように説明すれば明らかに言えますか。 $\boxed{11-B}$
Ｓ	：…。
Ｔ	：中心，点Ｐ，半径に着目すると何が言えますか。 $\boxed{9-B}$
Ｓ	：…。
Ｔ	：半径が中心と点Ｐの距離より？
S_3	：短い。

(7)　検証授業Ⅱの成果及び課題

ア　成果

検証授業Ⅰ後と同じように「分かる」「できる」チェックシート（**図38**）の「８　どこでつまずいたかが分かった」「９　つまずきを克服することができた」の項目に対する生徒の変容をみた。**図39，40**から，検証授業Ⅰと検証授業Ⅱを比較すると「よく分かった」「よくできた」と回答した生徒の割合が減少していることが分かる。これは，ほとんど計算だけの「高次方程式」に対して，「軌跡と領域」は図形と方程式，不等式を関連させて考えることが苦手で，より確かな理解まで至らなかったことが伺える。しかし，クラス全体の肯定的に捉えた割合をみると，つまずきの把握については同じで，つまずきの克服については微増しており，実態調査から通して考えると成果はあったと捉えることができる。

本日の数学の授業で，何が分かって，何ができたかを確認したいと思います。該当する数字に○をつけてください。
4…よくあてはまる，3…ややあてはまる，2…あまりあてはまらない，1…全くあてはまらない

1	関心・意欲をもって授業を受けることができた。	4　3　2　1
2	円の中心の座標や半径を読み取ることができた。	4　3　2　1
3	円を図示することができた。	4　3　2　1
4	不等式の表す領域を円の内部，外部に分けられることを理解できた。	4　3　2　1
5	円で分けられた領域を図示することができた。	4　3　2　1
6	境界線を含む，含まないの意味が分かった。	4　3　2　1
7	不等式を満たす点全体の集まりが，その不等式の表す領域であるということを理解できた。	4　3　2　1
8	どこで，つまずいたかが分かった。	4　3　2　1
9	つまずきを克服することができた。	4　3　2　1
10	教師の発問によって，自分の考えを深めたり，問題を解くきっかけとなったりした。	4　3　2　1
11	学び直しシートで，復習することができた。	4　3　2　1
12	問題を解く上で，学び直しシートが役に立った。	4　3　2　1
13	友だちと学び合う活動（教え，教えてもらう）がしっかりできた。	4　3　2　1
14	数学のよさが分かった。	4　3　2　1

図 38 「分かる」「できる」チェックート」⑧

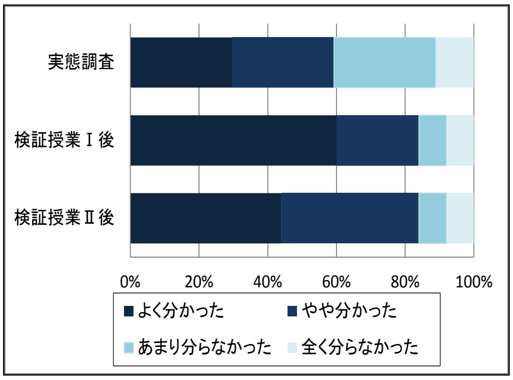


図 39 「８ どこでつまずいたかが分かった」

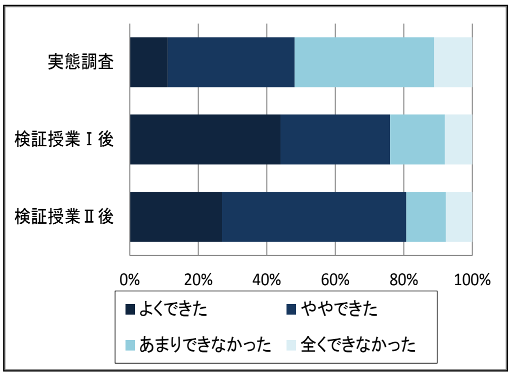


図 40 「９ つまずきを克服することができた」

(ｱ)　学び直しシートの活用（視点１）

授業後の感想から，学び直しシートを導入段階において活用したことに対して，「学び直しシートがあって，次に進みやすかった」「学び直しシートで忘れていたことを思い出し，授業に生かすことができた」などの肯定的な意見が多くみられた。既習内容の定着が不十分な生徒にとって，自分自身の理解度やつまずきを把握することができ，「補充的な学び直し」として，学び直しシートを利用することは効果的であったと考えられる。

(ｲ)　つまずきを生かした指導（視点２）

授業中，誤りやすいポイントを押さえようという姿勢を見ることができた。授業後，「誤答例を取り入れたことは良かった」という生徒の感想もあり，自分の考えとは異なる視点で捉えさせることができた。

(ｳ)　既習内容を振り返らせる発問（視点３）

既習内容が定着している生徒にとっては，思考を促す発問となり，反応もよかった。

イ　課題

(ｱ)　学び直しシートの活用（視点１）

普段から教師の説明や板書を待つ受け身の学習になっており，自らの力で問題を解いていくことができる生徒は少ない。自力解決できるような学び直しシートの内容の工夫が必要である。

(ｲ) つまずきを生かした指導（視点２）

授業の中で発生する思いがけないつまずきに対して，限られた時間の中で対処することの難しさを感じた。どこまで丁寧に指導するか，生徒に導き出させるかをある程度予想し，ポイントを絞る必要がある。

(ｳ) 既習内容を振り返らせる発問（視点３）

既習内容の定着が不十分な生徒に対して，いくつかの助言をしたが，「分からない」「関連させて考えられない」と思考を促すことができていない場面もあった。生徒が答えられないときに，次につなげる発問を準備する必要がある。

Ⅳ 研究のまとめ

１ 研究の成果

(1) 「補充的な学び直し」「発展的な学び直し」に着目した指導は，つまずきの把握・克服に効果的であることが分かった。

(2) 学び直しシートはまだ改良の余地があるが，レディネステストの結果や生徒の実態を踏まえて作成し，授業の導入段階で活用することは，既習内容の定着が不十分な生徒にとって，その定着のために望ましいことが分かった。

(3) 誤答例を取り上げることによって，生徒は誤りやすいところに対して意識が高まった。また，教師は誤答分析に心掛け，つまずきに対する早めの対処ができるようになった。生徒・教師どちらにとっても，つまずきを学びの機会と捉えることができた。

(4) 既習内容を振り返らせるために，発問を「補充的な学び直し」「発展的な学び直し」のどちらにあたるか整理し，意図的に行うことで，対象となる生徒やつまずきの把握・克服の目的を明確にもつことができた。

２ 研究の課題

(1) レディネステストの実施や学び直しシートの活用のためには，本時の学習における時間を確保することも必要とされる。そこで，次のような工夫が考えられる。

ア 学び直す内容を重点化し，問題数を絞り込むなどして学び直しシートの内容を精選する。

イ 宿題に学び直しシートの内容を取り入れて更なる定着を図ったり，前もってノートに演習の問題文を書かせたりする。

ウ 重要事項は板書せずに準備したものを掲示したり，教科書に線を引かせたりする。

(2) つまずきに対して「どこの操作でつまずくか」「つまずく原因は何か」という視点から，より細かく分析し，更なる手立てを工夫していくことが必要とされる。

(3) 特に既習内容の定着が不十分な生徒に対して，「考えたくなる」発問を実態や定着度に応じた段階的なものを準備する必要がある。また，発問の間，タイミング，指名の仕方などの工夫が必要とされる。

(4) すべての単元において「学び直し」を取り入れた指導計画を作成し，年間を通して，また，授業の学習過程で「学び直し」をどのように位置付けていくかを検討する必要がある。

＜引用文献＞

*1）片桐　重男　編著　『つまずきを生かす指導』　1982 年　明治図書

*2）山口　武志　『算数・数学 RooT』「学び直し」を考える　2011 年　日本文教出版

『数学教育 10 月号』生徒の学習を確実にする「学び直し」の工夫を　2008 年　明治図書

＜参考文献＞

○　中央教育審議会答申　『幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について』　平成 20 年　文部科学省

○　文部科学省　『高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』　平成 21 年　実教出版

『中学校学習指導要領解説　数学編』　平成 20 年　教育出版

『小学校指導要領解説　算数編』　平成 20 年　東洋館出版

○　文部省　『高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編』　平成 11 年　実教出版

『中学校学習指導要領解説　数学編』　平成 11 年　大阪書籍

『小学校指導要領解説　算数編』　平成 11 年　東洋館出版

○　吉田　明史　編著　『高等学校新学習指導要領の展開　数学科編』　平成 22 年　明治図書

○　吉田　明史　『中等教育資料 11 月号』これからの数学教育－数学的活動の充実－　平成 21 年　学事出版

○　片桐　重男　著　『問題解決過程と発問分析』　1988 年　明治図書

○　月刊誌　『数学教育 9 月号』　2010 年　明治図書

○　県総合教育センター　『指導資料　算数・数学 129 号』　平成 23 年

『研究紀要 113 号』　平成 21 年

長期研修者〔 中島　康二 〕
担 当 所 員〔 福元　洋介 〕

【研究の概要】

本研究は，基礎・基本の確実な定着を図るために，算数・数学の学習におけるつまずきを分析し，「学び直し」に着目した指導の在り方を追究し，指導の手立てを工夫したものである。

具体的には，小・中・高等学校における指導内容の系統性を整理し，レディネステストを行い，その結果を踏まえて学び直しシートを作成・活用した。また，誤答の提示等によるつまずきを生かした指導や既習内容を振り返らせる発問を行い，既習内容の定着を図ったり，既習内容と新しい内容を関連させ，問題解決の見通しをもたせたりした。

その結果，数学Ⅱ「高次方程式」「軌跡と領域」の検証授業を通して，生徒がつまずきを把握・克服するために効果的であることが明らかになった。

【担当所員の所見】

算数・数学は系統性が明確な教科であり，新しい内容を学習するに当たって，既習内容をきちんと理解していないと，新しい内容を理解できないことが多い。それがつまずきの大きな要因である。学年が上がるにつれてつまずきが積み重ねられていき，その結果，苦手意識が強くなったり，嫌いになったりする割合が高くなっていく。教師はそれを何とかしようと指導を行っているが，十分とはいえない。

本研究は，つまずきを克服するために生徒の実態を把握し，指導内容の系統性を整理して，「学び直し」に着目した指導の中で，過去の経験等からつまずきを予想して指導に生かしたり，発問を通して既習内容を振り返らせたりする指導について明らかにした。

学び直しシートを通して，教師は作成にあたり教材研究が深まり，生徒は自分のつまずきに気付き，克服しようとする姿勢が見られた。そして，授業に対する取組姿勢も改善されてきた。本研究では，授業の中での取扱のみであったが，より効果的な活用法については研究の余地があると思われる。

このような取組は，高等学校はもとより，中学校においても十分活用できる内容であると思われる。今後，多くの学校で行われ，多くの生徒がつまずきを克服できる授業が行われることを期待したい。

鹿児島県総合教育センター